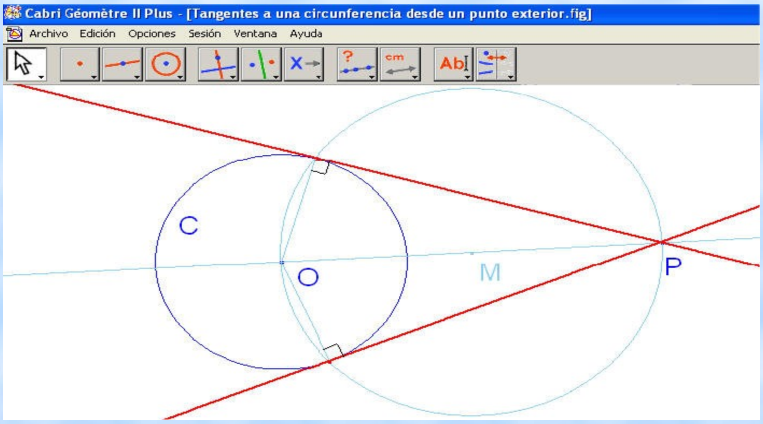
# *Taller de Construcciones clásicas de Geometría con Cabri-Géomètre*

## *Días 11, 12 y 13 de noviembre de 2008*

***Juan Francisco Padial y Eugenia Rosado***

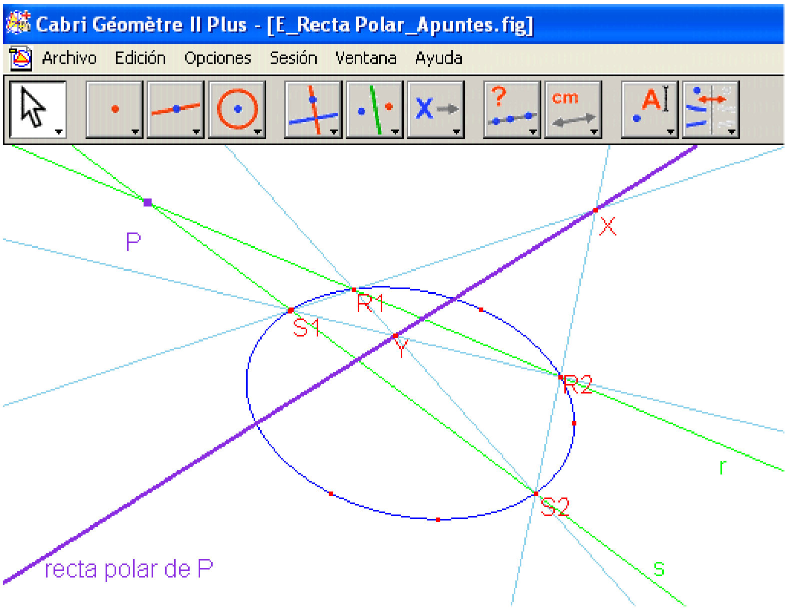
*jf.padial@upm.es* *eugenia.rosado@upm.es*




El taller consiste en una sesión de tres horas en la que se presentan una serie de problemas geométricos de sencilla formulación y resolubles gráficamente. Para la resolución de dichos problemas se utilizará el programa informático *Cabri-Géometrè*.

**Departamento de Matemática Aplicada a la Edificación,**
**al Medio Ambiente y Urbanismo**
**E.T.S. de Arquitectura, U.P.M.**

# Cabri Géomètre



# Puntos

El punto es el objeto base de todas las figuras. Cabri Géomètre manipula los puntos en el plano euclideo. Se pueden elegir los `Atributos` de un objeto: color, nombre, relleno, tamaño, etc...

Para practicar...

- Dibujar tres puntos (no alineados).
- Nombrar los puntos con $A, B, C$.
- Hallar la distancia de un punto a otro.
- Dibujar un triángulo usando la herramienta `Triángulo` sobre el triángulo $ABC$.

# Rectas

Cabri Géomètre manipula las rectas del plano euclideo, semirectas y segmentos. Se pueden construir rectas parelalas a una dada, perpendiculares, etc...

Para practicar...

- Dibujar los segmentos que determinan los puntos $A, B, C$.
- Nombrar el segmento $AB$ como $c$, $BC$ como $a$ y $CA$ como $b$.
- Mediante la herramienta `Atributos`, cambiar `Color` y `Espesor` de los segmentos.
- Marcar y medir los ángulos del triángulo $ABC$.
- Introducir el texto siguiente: Área de un triángulo = (base×altura)/2
- Objetivo: Hallar el área del triángulo.
  a. Trazar la recta $r$ perpendicular a uno de los lados del triángulo desde el vértice opuesto; por ejemplo, vértice $C$ y lado $c$.
  b. Definir el punto de intersección $M$ entre dicha recta perpendicular y el lado.
  c. Hallar la distancia desde $M$ a $C$.
  d. Hallar la longitud del lado $c$.
  e. Mediante el uso de la `Calculadora`, hallar el área del triángulo.
- Mover la construcción.
- Dibujar un triángulo usando la herramienta `Triángulo` sobre el triángulo $ABC$.
- Cálcular el área del triángulo usando la herramienta `Área`.

# Macros

Una vez realizada una construcción, se pueden seleccionar los `Objetos Iniciales` ($X \rightarrow$) y los `Objetos Finales` ($\rightarrow Y$). Con la herramienta `Validar Macro` validamos y guardamos la construcción realizada.

Para practicar...

Sobre la construcción anterior vamos a crear una `Macro`:

- Como `Objetos Iniciales` marcamos los tres puntos iniciales.
- Como `Objetos Finales` marcamos:
  - el triángulo,
  - la recta $r$ perpendicular a uno de los lados y que contiene al vértice,
  - el ángulo que forma con el lado,
  - la áltura del triángulo
  - la base del triángulo,
  - el área del triángulo.
- Seleccionamos `Validar Macro` y le damos un nombre y un icono a la construcción realizada.
- Prueba: Damos tres puntos en el plano y seleccionamos la macro creada. Marcando los objetos iniciales de la construcción y la macro creada nos dará los objetos finales de la construcción.

# Triángulos

Se proponen los siguientes ejercicios:

1. Dado un triángulo obtener el baricentro (el baricentro es el punto de corte de las medianas):
   a. Obtenemos las medianas del triángulo (la mediana es la recta que une el punto medio de un lado del triángulo con el vértice opuesto).
   b. Comprobar mediante la herramienta `¿Pertenece?` que las tres medianas del triángulo se cortan en un punto.

2. Dado un triángulo obtener la circunferencia inscrita (la circunferencia inscrita es la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo):
   a. Obtenemos las bisectrices del triángulo (la bisectriz de un ángulo es la recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales).
      Comprobar mediante la herramienta `¿Pertenece?` que las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto.
   b. Obtenemos el incentro (el incentro es el punto de corte de las bisectrices).
   c. Obtener la circunferencia de centro el incentro y tangente a un lado del triángulo:
      i Para ello trazamos la recta perpendicular a uno de los lados y que contiene por el incentro.
      ii La circunferencia pedida es la que tiene por centro el incentro y contiene al punto de intersección de la recta perpendicular y el lado considerado.

   Prueba: Dicha circunferencia es tangente a los otros dos lados del triángulo.

3. Dado un triángulo obtener la circunferencia circunscrita (la circunferencia circunscrita es la circunferencia que contiene a los tres vértices del triángulo):
   a. Obtenemos las mediatrices del triángulo (la mediatriz de un lado del triángulo es la recta perpendicular a dicho lado por el punto medio del lado).
   Comprobar mediante la herramienta `¿Pertenece?` que las tres mediatrices del triángulo se cortan en un punto.
   b. Obtenemos el circunscentro (el circunscentro es el punto de corte de las mediatrices).
   c. Obtener la circunferencia de centro el circunscentro y que contiene a uno de los vértices del triángulo:
   Prueba: La circunferencia obtenida contiene a los otros dos vértices del triángulo.

Para practicar...

Podemos crear `Macros` a partir de las tres construcciones anteriores, de manera que, utilizando dichas `Macros` podamos, a partir de un triángulo, obtener: el baricentro, el incentro, la circunferencia inscrita, la mediatriz y la circunferencia cincunscrita.

# Cónicas

Cabri Géomètre permite manipular todas las cónicas propias (elipses, parábolas, hipérbolas) del plano euclideo. También son representadas las cónicas degeneradas como dos rectas distintas.

La herramienta `[curvas] Cónica` permite construir la cónica que pasa por cinco puntos. Si cuatro de los puntos están alineados o si dos puntos están superpuestos, la cónica no se define.

- Lugares geométricos:
  Elipse: *Lugar geométrico de los puntos $P$ del plano tales que la suma de distancias a dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ es constante.*
  Hipérbola: *Lugar geométrico de los puntos $P$ del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ es constante.*
  Parábola: *Lugar geométrico de los puntos $P$ del plano tales que la suma de distancias a un punto fijo $F$ y a una recta fija $r$ es constante.*
  Circunferencia: *Lugar geométrico de los puntos $P$ del plano tales que la distancia a un punto fijo $O$ es constante.*
- Dibujar una elipse, una parábola y una hipérbola.

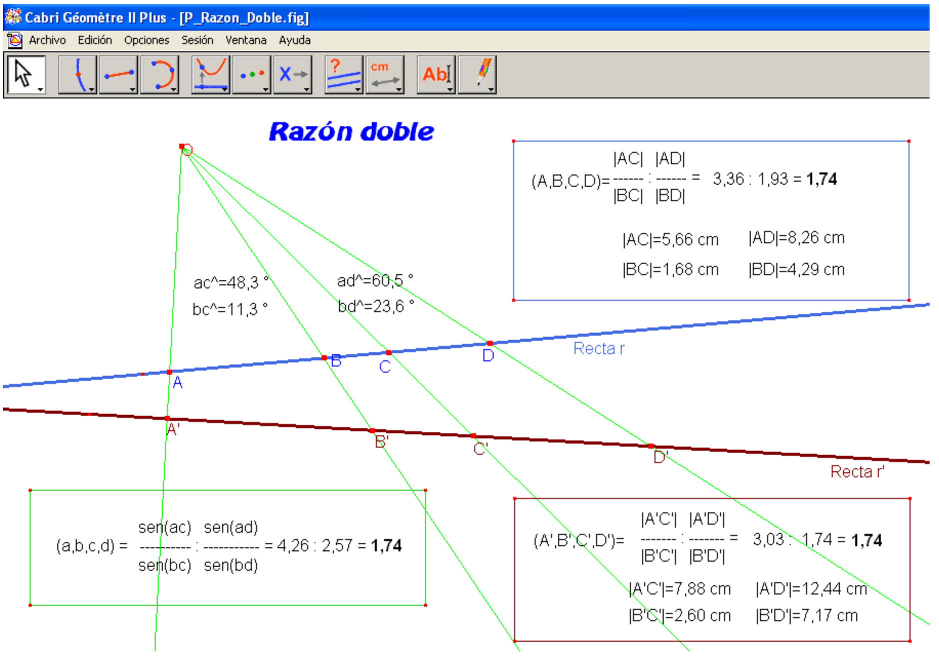
# Circunferencia

1. Dada una circunferencia $C$ y un punto $P$ de la circunferencia, hallar la recta tangente a $C$ por $P$.

2. Dada una circunferencia $C$ y un punto $P$ exterior a la circunferencia, hallar las rectas tangentes a $C$ por $P$.

3. Dadas dos circunferencias $C_1$ y $C_2$, hallar las rectas tangentes comunes. (Utilizar la herramienta `Compás`).

# Geometría Proyectiva

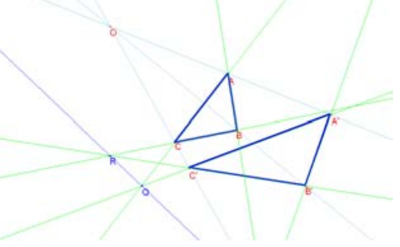


# Teorema de Desargues

1. Definir un punto origen $O$ y dar tres rectas que contengan a l punto $O$.

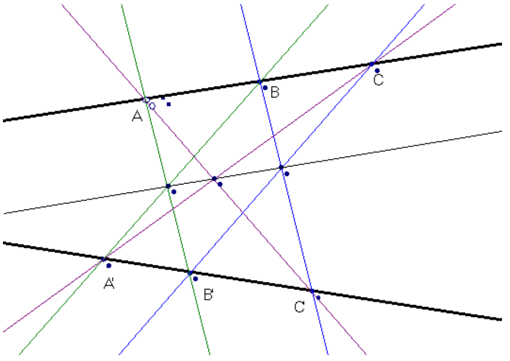
2. Construir dos triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ con vértices en las rectas anteriores:
   a. Definir los triángulos marcando sus respectivos lados.
   b. Cambiar el color y el grosor a los lados de los triángulos.
   c. Nombrar los vértices de los triángulos.

3. Construir las siguientes rectas y sus respectivas intersecciones:
   a. Rectas: $AB$ y $A'B'$ con intersección $P = AB \cap A'B'$.
   b. Rectas: $AC$ y $A'C'$ con intersección $Q = AC \cap A'C'$.
   c. Rectas: $BC$ y $B'C'$ con intersección $R = BC \cap B'C'$.



4. **SOLUCIÓN:** La recta que une los puntos $P$ y $Q$. Observar que dicha recta contiene al punto $R$.

# Teorema de Pappus



# Razón doble

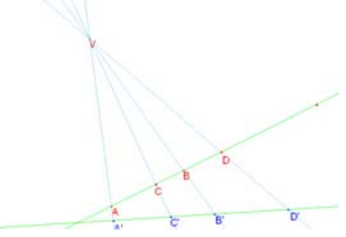
Teorema. Si cuatro puntos alineados $A, B, C, D$, se proyectan desde un vértice $V$ en cuatro puntos alineados $A', B', C', D'$, entonces las siguientes razones son iguales:

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{A'C'}{C'B'}}{\frac{A'D'}{D'B'}}.$$

Es decir, la razón $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ se mantiene invariante por proyecciones.

Definición. Dados cuatro puntos alineados, $A, B, C, D$, la razón doble $\{A, B; C, D\}$ del par ordenado $(C, D)$ con respecto al par ordenado $(A, B)$ es

$$\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$




Prueba: Abrir el macro `razón doble` (cargado previamente).

Dibujar la situación del enunciado del Teorema y calcular las razones dobles de los pares de puntos $(C, D)$ con respecto al par ordenado $(A, B)$ y $(C', D')$ con respecto al par ordenado $(A', B')$.

# Cuarto Armónico

Un caso especial importante de razón doble ocurre cuando $\{A, B; C, D\} = -1$. En ese caso, $C$ y $D$ divide el segmento $\overline{AB}$ interna y externamente en la misma proporción y se dice que los pares de puntos $(A, B)$ y $(C, D)$ son conjugados armónicos uno con respecto al otro. También se dice que $C$ es el cuarto armónico de $A, B, D$. Si, en particular, $C$ (resp. $D$) divide al segmento $\overline{AB}$ internamente (resp. externamente) en razón $1\colon 1$, entonces uno de ellos es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el otro es el punto del infinito de la recta que une $A$ y $B$.

Construcción del cuarto armónico de tres puntos $A, B, C$ alineados.

1. Dar una recta $r$ y definir tres puntos $A, B, C$ en ella.
2. Dar una recta que contenga al punto $B$ y dar un punto $C'$ sobre ella.
3. Determinar el punto simétrico de $C'$ respecto de $B$ (simetría central) y nombrarlo: $D'$.
4. Determinar la recta $CC'$.
5. Determinar la recta paralela a $C''D'$ que contiene al punto $A$.
6. Determinar el punto de intersección de la recta anterior y la recta $CC'$. Nombrar a dicho punto $O$.
7. Hallar el punto de corte de la recta que une $O$ y $D'$ con la recta $r$.
8. Dicho punto de intersección, $D$, es el cuarto armónico de $A, B, C$.

Prueba: Abrir el macro `razón doble` (se tiene que haber cargado previamente). Con dicho macro, calcular la razón deble de los pares de puntos $(A, B)$ y $(C, D)$.

# Cuadrángulo completo

Construcción del Cuarto Armónico con sólo la utilización de la regla.

1. Construir una recta y dar tres puntos: $A, B, O$ en ella.
2. Determinar el cuarto armónico de $A, B, O$ y nombrarlo $C$. (Utilizar el macro `Cuarto_Armonico`).
3. Tomamos otra recta que pase por $O$ y damos dos puntos $A'$ y $B'$ en ella.
4. Determinar el cuarto armónico de $A', B', O'$ y nombrarlo $C'$. (Utilizar el macro `Cuarto_Armonico`).
5. Construir las rectas $AA', CC'$ y $BB'$. Comprobar que son concurentes. **¿Por qué son concurrentes?**
6. Construir las diagonales $AB'$ y $A'B$.
7. Comprobar que $AB' \cap A'B \in CC'$. **¿Por qué? ¿Qué podemos deducir?**

Observación: Esta construcción permite, dada cualquier cónica del haz de cónicas determinado por los puntos $A, B, A', B'$, obtener la polar de un punto $O$, con SÓLO la utilización de la regla. La polar de $O$ es la recta $CC'$.

Observación: Análogamente, esta construcción permite, dada cualquier cónica del haz de cónicas determinado por los puntos $A, B, A', B'$, obtener el polo de una recta respecto de la cónica, con SÓLO la utilización de la regla.

Observación: Fijado el punto $O$, todas las cónicas del haz determinado por $A, B, A', B'$, tienen la misma polar.

# Polar

1. Dar un punto. Nombrar el punto: $P$

2. Dar una cónica.

3. Dar dos rectas desde $P$ que corten en cuatro puntos a la cónica: $A, B, C, D$

4. Constuir rectas diagonales del cuadrilátero $ABCD$: recta $AD$ y recta $CD$

5. Nombrar $Q = AD \cap CD$

6. Construir la recta $AC$ y recta $BD$

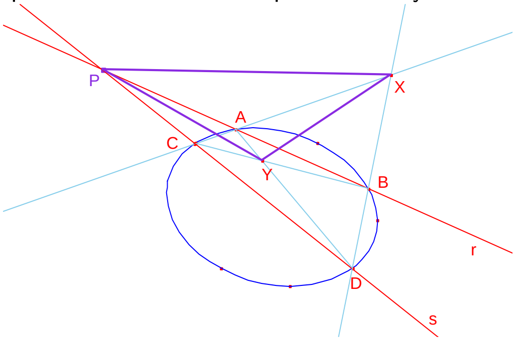
7. Nombrar $R = AC \cap BD$

8. **Solución:** *la polar de* $P$ respecto la cónica, es la recta $QR$.

# Polo

- ▶ Utilizando la construcción anterior, construir el polo de una recta $R$.

Teorema. Si $A, B, C, D$ son cuatro puntos en una cónica $\bar{C}$, entonces el triángulo diagonal (triángulo con vértices $P, X, Y$, en el dibujo) del cuadrángulo $ABCD$, es autopolar para $\bar{C}$. Esto es, la recta que une $XP$ es la recta polar de $Y$, la recta que une $PY$ es la recta polar de $X$, y la recta $XY$ es la recta polar de $P$.




Prueba: Realícese el dibujo que corresponde al enunciado del Teorema y utilizando los macros: `recta polar` y `polo` (cargados previamente), compruebese el enunciado.