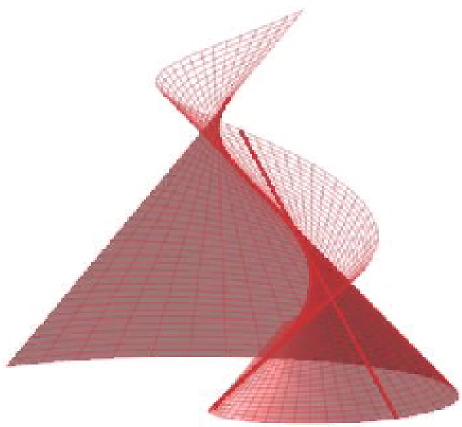
1 Superficies regladas

En la lección anterior definimos las superficies regladas asi como las superficies cónicas, cilíndricas (cónicas cuyo vértice es un punto del infinito) y las desarrollables tangenciales. En esta lección vamos estudiar la clasificación de las superficies regladas. Repasamos primero algunas de las definiciones estudiadas en la lección anterior.

Definición. Una *superficie reglada* es la superficie generada por una recta de dirección variable $w(u)$ que se mueve sobre una curva $c(u)$, $u \in I \subseteq \mathbb{R}$, llamada *curva base* o *directriz*.

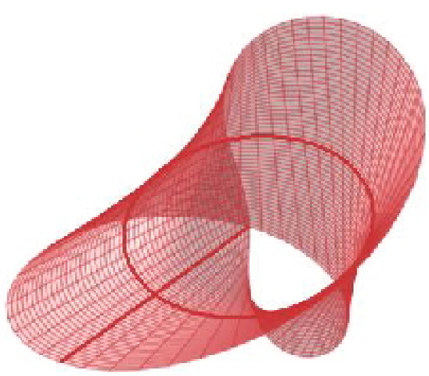
A lo largo del curso hemos visto distintos ejemplos de superficies regladas. Por ejemplo:

Superficie formada por las rectas tangente a una hélice circular.



$$\begin{cases} r(u,v) = c(u) + vc'(u), \\ c(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \\ 0 \leq u \leq 2\pi, \ -u \leq v \leq 2. \end{cases}$$

Banda de Möbius. Ejemplo de superficie no orientable.



$$\begin{cases} r(u,v) = c(u) + vw(u), \\ c(u) = (\cos u, \ \sin u, \ 0)\,, \\ w(u) = \left(\cos \frac{u}{2} \cos u, \ \cos \frac{u}{2} \sin u, \ \sin \frac{u}{2}\right), \\ 0 \leq u \leq 2\pi, \ -1 \leq v \leq 1. \end{cases}$$

Una superficie reglada tiene siempre una parametrización en *forma reglada*:

$$r(u,v) = c(u) + vw(u).$$

Para cada $u_0 \in I$ tenemos una recta $r(u_0,v) = c(u_0) + vw(u_0)$ llamada *generatriz*.

También podemos considerar una parametrización considerando los segmentos que unen los puntos de dos curvas parametrizadas $c_1(u)$ y $c_2(u)$:

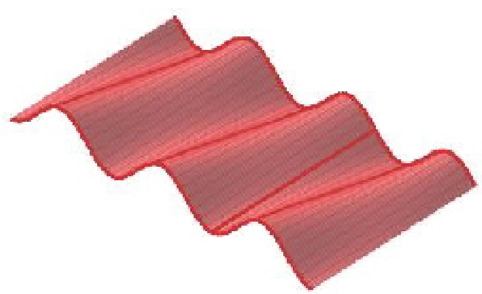
$$\begin{aligned} r(u,v) &= (1-v)c_1(u) + vc_2(u) \\ &= c_1(u) + v(c_2(u) - c_1(u)), \quad 0 \le v \le 1. \end{aligned}$$

En este caso, los vectores directores de las generatrices son: $w(u) = c_2(u) - c_1(u)$.

Ejemplo. Tomando

$$\begin{cases} r(u,v) = (1-v)c_1(u) + vc_2(u), \\ c_1(u) = (-1, u, \sin(u)), \\ c_2(u) = (1, u, \cos(u)), \\ -3\pi \le u \le 3\pi, \ 0 \le v \le 1. \end{cases}$$

obtenemos un primer modelo de las bodegas Ysios (1998-2001) en Laguardia, obra de Santiago Calatrava.



2 Clasificación de las superficies regladas

Como por cada punto de una superficie reglada hay una recta contenida en la superficie que pasa por dicho punto, la curvatura de Gauss en el punto es o bien negativa o bien cero. Por tanto, un punto genérico de una superficie reglada es o umbílico (y está en un entorno plano) o parabólico o hiperbólico. Veamos analíticamente dicho resultado.

La curvatura de Gauss, $K_G = k_1 k_2$, donde k_1, k_2 son las dos curvaturas principales de la superficie con parametrización $r(u,v)$ en un punto genérico $P = r(u,v)$, se puede calcular como el cociente de los determinantes de las matrices de la segunda y primera forma fundamental:

$$K_G(u,v) = \frac{\det II_P}{\det I_P},$$

donde

$$I_P = \begin{pmatrix} r_u(u,v)\cdot r_u(u,v) & r_u(u,v)\cdot r_v(u,v) \\ r_u(u,v)\cdot r_v(u,v) & r_v(u,v)\cdot r_v(u,v) \end{pmatrix}, \quad II_P = \begin{pmatrix} r_{uu}(u,v)\cdot N_P & r_{uv}(u,v)\cdot N_P \\ r_{uv}(u,v)\cdot N_P & r_{vv}(u,v)\cdot N_P \end{pmatrix},$$

y

$$N_P = \frac{r_u(u,v)\wedge r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\wedge r_v(u,v)\|},$$

es el vector normal a la superficie en el punto P.
Consideramos una parametrización en forma reglada de la superficie:

$$r(u,v) = c(u) + v w(u),$$

tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_u(u,v) = c'(u) + v w'(u), \\ r_v(u,v) = w(u), \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{uu}(u,v) = c''(u) + v w''(u), \\ r_{uv}(u,v) = w'(u), \\ r_{vv}(u,v) = 0. \end{array} \right.$$

Por tanto, en este caso se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \det II_P & = & \det \begin{pmatrix} r_{uu}(u,v)\cdot N_P & r_{uv}(u,v)\cdot N_P \\ r_{uv}(u,v)\cdot N_P & 0 \end{pmatrix} \\ & = & -\left(r_{uv}(u,v)\cdot N_P\right)^2 \\ & = & -\frac{1}{\|r_u(u,v)\wedge r_v(u,v)\|^2}\left(r_{uv}(u,v)\cdot\left(r_u(u,v)\wedge r_v(u,v)\right)\right)^2 \le 0. \end{array}$$

Como $\det I_P = \|r_u(u,v)\wedge r_v(u,v)\|^2 > 0$, se concluye que $K_G(u,v) \le 0$ en todo punto $P = r(u,v)$.

Observación 1. Una clase importante de superficies regladas es aquella en la que las superficies son isométricas al plano. Como ya hemos estudiado, la curvatura de Gauss es invariante por isometrías, y, por tanto, toda superficie isométrica al plano tiene, como el plano, curvatura de Gauss idénticamente nula ($K_G \equiv 0$).

Definición. Una superficie se dice *desarrollable* si es isométrica localmente al plano; esto es, tiene curvatura de Gauss idénticamente nula.

Observación 2. De $K_G = k_1 k_2 \equiv 0$ se deduce que una de las curvaturas principales es idénticamente nula y, por tanto, todos los puntos de una superficie desarrollable son parabólicos.

Teniendo en cuenta la definición la deficinión de superficie desarrollable clasificamos las superficies regladas en:

- Superficies desarrollables ($K_G \equiv 0$) también llamadas *superficies de simple curvatura.*
- Superficies no desarrollables (K_G no idénticamente nula) también llamadas *superficies de doble curvatura.*

2.0.1 Caracterización de las superficies desarrollables

Tomamos la siguiente parametrización reglada obtenida al consider los segmentos que unen los puntos de dos curvas parametrizadas $c_1(u)$ y $c_2(u)$ (como el ejemplo de la superficie de las bodegas Ysios):

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (1-v)c_1(u) + vc_2(u) \\ &= c_1(u) + v\left(c_2(u) - c_1(u)\right), \quad 0 \le v \le 1. \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_u(u,v) = c_1'(u) + v\left(c_2'(u) - c_1'(u)\right), \\ r_v(u,v) = c_2(u) - c_1(u), \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} r_{uu}(u,v) = (1-v)c_1''(u) + vc_2''(u), \\ r_{uv}(u,v) = c_2'(u) - c_1'(u), \\ r_{vv}(u,v) = 0. \end{array} \right.$$

La condición $K_G \equiv 0$ equivale a:

$$\begin{aligned} 0 &= r_{uv}(u,v) \cdot \left(r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\right) \\ &= \left(c_2'(u) - c_1'(u)\right) \cdot \left(c_1'(u) + v\left(c_2'(u) - c_1'(u)\right)\right) \wedge \left(c_2(u) - c_1(u)\right) \\ &= c_2'(u) \cdot \left(c_1'(u) \wedge \left(c_2(u) - c_1(u)\right)\right). \end{aligned}$$

Conclusión. La superficie reglada es desarrollable si y sólo si para todo $u \in I$, los vectores tangentes a las curvas c_1, c_2 y el vector director de la recta que une $c_1(u)$ con $c_2(u)$ son coplanarios.

Equivalentemente, el plano tangente a la superficie en todos los puntos de la recta generatriz que une $c_1(u)$ con $c_2(u)$ es el mismo en todos los puntos de la recta.

2.1 Clasificación de las superficies desarrollables

Sea S una superficie desarrollable con parametrización

$$r(u,v) = c(u) + vw(u), \quad \text{suponemos } ||w(u)|| = 1.$$

La condición $K_G \equiv 0$ equivale a que la siguiente función, llamada *parámetro de distribución*, sea idénticamente nula:

$$\begin{aligned} p(u) &= r_{uv}(u,v) \cdot (r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)) \\ &= w'(u) \cdot (c'(u) \wedge w(u)) \end{aligned}$$

La condición $p \equiv 0$ da lugar a los siguientes casos:

1. Si $c' \equiv 0$, entonces c es constante, $c(u) = P$ y la parametrización se escribe como sigue:
$$r(u,v) = P + vw(u), \quad \text{suponemos } ||w(u)|| = 1.$$
La superficie es un *cono generalizado* de vértice el punto P por el que pasan todas las rectas generatrices. Los puntos singulares
$$0 = r_u(u,v) \wedge r_v(u,v) = vw'(u) \wedge w(u),$$
se alcanzan para el valor del parámetro $v = 0$; esto es, $r(u,0) = P$ es el único punto singular.

2. Si $w' \equiv 0$ (y $c'(u) \neq 0$ para algún u) entonces $w(u) = w$ y la parametrización se escribe como sigue:
$$r(u,v) = c(u) + vw, \quad \text{con } ||w|| = 1.$$
La superficie es un *cilindro generalizado* de dirección w. Se tiene:
$$0 = r_u(u,v) \wedge r_v(u,v) = c'(u) \wedge w,$$
luego la superficie no tiene puntos singulares pues suponemos que $c'(u)$ y w son independientes. (Si no lo fueran, $c(u)$ sería una recta y la superficie sería sólo dicha recta).

3. **Caso genérico** (c' y w' no son indénticamente nulas). La condición $p \equiv 0$ implica que $c'(u)$ es combinación lineal de $w(u)$ y $w'(u)$ para cada valor de u; esto es,
$$c'(u) = \lambda(u)w(u) + \mu(u)w'(u),$$
con
$$\lambda(u) = c'(u) \cdot w(u), \quad \mu(u) = \frac{c'(u) \cdot w'(u)}{||w'(u)||^2}.$$

Ya que multiplicando $c'(u)$ por $w(u)$ obtenemos: $c'(u)\cdot w(u) = \lambda(u)w(u)\cdot w(u)$, pues $w(u)\cdot w'(u) = 0$. Y multiplicando $c'(u)$ por $w'(u)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} c'(u)\cdot w'(u) &= \lambda(u)w(u)\cdot w'(u) + \mu(u)||w'(u)||^2 \\ &= \mu(u)||w'(u)||^2. \end{aligned}$$

Trasladamos la curva $c(u)$ en la dirección del vector $-\mu(u)w(u)$ y obtenemos una nueva curva directriz:

$$\tilde{c}(u) = c(u) - \mu(u)w(u).$$

Por tanto, sustituyendo lo obtenido en la parametrización de la superficie tenemos:

$$r(u,v) = \tilde{c}(u) + (\mu(u)+v)w(u), \quad \text{con } ||w(u)|| = 1.$$

Se cumple:

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(u) &= c'(u) - \mu'(u)w(u) - \mu(u)w'(u) \\ &= \lambda(u)w(u) + \mu(u)w'(u) - \mu'(u)w(u) - \mu(u)w'(u) \\ &= (\lambda(u) - \mu'(u))\, w(u). \end{aligned}$$

Si $\lambda - \mu' \equiv 0$, entonces $\tilde{c}' \equiv 0$ y, por tanto, $\tilde{c}$ es constante, de manera que la superficie es un <u>cono</u>.

Si $\lambda - \mu'$ no es idénticamente nula, de hecho podemos suponer que no se anula nunca, entonces sustituimos $w(u)$ en la parametrización y obtenemos:

$$r(u,v) = \tilde{c}(u) + (\mu(u)+v)\tfrac{1}{\lambda(u)-\mu'(u)}\tilde{c}'(u).$$

Hacemos el cambio de parámetro $\bar{v} = \frac{\mu(u)+v}{\lambda(u)-\mu'(u)}$ y obtenemos la siguiente parametrización de la superficie:

$$r(u,\bar{v}) = \tilde{c}(u) + \bar{v}\tilde{c}'(u)$$

y la superficie es una *desarrollable tangencial*.

Conclusión. Las superficies desarrollables se clasifican en cilíndricas, cónicas y desarrollables tangenciales.

2.1.1 Arista de retroceso

Calculamos los puntos singulares de una superficie desarrollable tangencial con parametrización

$$r(u,\bar{v}) = \tilde{c}(u) + \bar{v}\tilde{c}'(u).$$

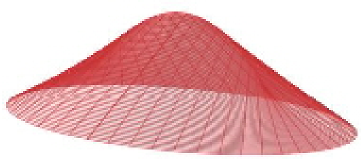
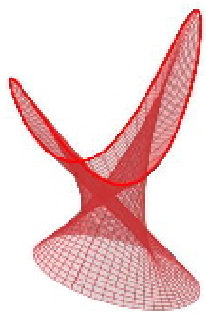
Tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_u(u,\bar{v}) = \tilde{c}'(u) + \bar{v}\tilde{c}''(u) \\ r_{\bar{v}}(u,\bar{v}) = \tilde{c}'(u) \end{array} \right. \Longrightarrow r_u(u,\bar{v}) \wedge r_{\bar{v}}(u,\bar{v}) = \bar{v}\tilde{c}''(u) \wedge \tilde{c}'(u).$$

Por tanto, los puntos singulares de la parametrización se corresponden con $\bar{v} = 0$. Es decir, la curva $\tilde{c}(u)$ está formada por puntos singulares y se conoce como *arista de retroceso*. La superficie está formada por dos hojas ($\bar{v} < 0$ y $\bar{v} > 0$) que se cortan a lo largo de la arista de retroceso.

2.1.2 Ejemplo: Cubierta de pendiente constante

Consideramos la superficie con curva directriz una elipse y rectas de pendiente constante respecto al plano que contiene la elipse. Las figuras muestran dos soluciones: la solución habitual, ajustada a la curva de autointersección de la superficie, y una extensión de la superficie. Se propone al alumno que obtenga con estas ideas una aproximación de la obra "Oculus" de S. Calatrava, Nueva York, 2016.


Consideramos la elipse en el plano $z = 0$ con parametrización

$$c(u) = (2\cos(u), 3\sin(u), 0), \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

En cada punto de la elipse consideramos una recta en el plano normal a la curva y que forma un ángulo fijo α_0 respecto al plano $z = 0$. Por tanto, el vector director de dichas rectas es:

$$w(u) = \cos(\alpha_0)n(u) + \sin(\alpha_0)b(u),$$

donde $n(u)$ y $b(u)$ son los vectores normal y binormal a la curva en el punto $c(u)$. La parametrización de la superficie es, por tanto,

$$\begin{aligned} r(u,v) &= c(u) + vw(u) \\ &= c(u) + v\left(\cos(\alpha_0)n(u) + \sin(\alpha_0)b(u)\right), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq k(u). \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que $p \equiv 0$ y por tanto la superficie es desarrollable. Tomando $\alpha_0 = \arcsin(1/\sqrt{5})$ tenemos:

$$\lambda(u) = c'(u) \cdot w(u) = 0, \quad \mu(u) = \frac{c'(u) \cdot w'(u)}{||w'(u)||^2} = -\sqrt{5\cos(u)^2 + 4}.$$

Luego la superficie es desarrollable tangencial y la arista de retroceso es:

$$\tilde{c}(u) = r(u, \mu(u)).$$

3 Puntos singulares de una superficie reglada

Acabamos de ver que en una superficie desarrollable tangencial los puntos singulares forman la arista de retroceso de la superfice. Estudiamos los puntos singulares de una superficie reglada general con parametrización

$$r(u,v) = c(u) + vw(u)$$

Los puntos singulares satisfacen:

$$r_u(u,v) \wedge r_v(u,v) = (c'(u) + vw'(u)) \wedge w(u) = 0.$$

Para hallar los valores de v para los cuales se satisface la ecuación anterior multiplicamos escalarmente la expresión anterior por $w'(u) \wedge w(u)$, suponiendo $w'(u) \wedge w(u) \neq \vec{0}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)) \cdot (w'(u) \wedge w(u)) \\ &= ((c'(u) + vw'(u)) \wedge w(u)) \cdot (w'(u) \wedge w(u)) \\ &= (c'(u) \wedge w(u)) \cdot (w'(u) \wedge w(u)) + v \left\| w'(u) \wedge w(u) \right\|^2, \end{aligned}$$

de donde,

$$v = -\frac{(c'(u) \wedge w(u)) \cdot (w'(u) \wedge w(u))}{\left\| w'(u) \wedge w(u) \right\|^2}.$$

Por tanto, los puntos singulares de la superficie se encuentran en la curva con parametrización:

$$\beta(u) = c(u) - \frac{(c'(u) \wedge w(u)) \cdot (w'(u) \wedge w(u))}{\left\| w'(u) \wedge w(u) \right\|^2} w(u),$$

que llamamos *línea de estricción.* Nótese que en la línea de estricción además de los puntos singulares se encuentran los puntos de la superficie tales que el vector $w'(u) \wedge w(u)$ es ortogonal al vector $r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)$.

3.0.3 Puntos centrales

Definición. Llamamos *puntos centrales* a los puntos regulares de la línea de estricción.

Interpretación geométrica de los puntos centrales. Veamos que en una superficie reglada no desarrollable la curvatura de Gauss alcanza su valor máximo en los puntos centrales.

Supongamos $p(u) \neq 0$, teniendo en cuenta la expresión de la curvatura de Gauss:

$$K_G(u,v) = -\frac{(r_{uv}(u,v) \cdot (r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)))^2}{\left\| r_u(u,v) \wedge r_v(u,v) \right\|^4} < 0,$$

se deduce que el valor absoluto de la curvatura de Gauss, $|K_G(u,v)|$, es máximo cuando el valor de

$$\|r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\|^2$$

es mínimo. Teniendo en cuenta la siguiente expresión:

$$r_u(u,v) \wedge r_v(u,v) = c'(u) \wedge w(u) + vw'(u) \wedge w(u),$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dv}\|r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\|^2 \\
&= 2\frac{d}{dv}\left(r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\right) \cdot \left(r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\right) \\
&= 2\left(w'(u) \wedge w(u)\right) \cdot \left(c'(u) \wedge w(u) + vw'(u) \wedge w(u)\right) \\
&= 2\left(w'(u) \wedge w(u)\right) \cdot \left(c'(u) \wedge w(u)\right) + 2v\|w'(u) \wedge w(u)\|^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, el valor máximo de $\|r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\|^2$ se alcanza para el siguiente valor de v:

$$v = -\frac{\left(w'(u) \wedge w(u)\right) \cdot \left(c'(u) \wedge w(u)\right)}{\|w'(u) \wedge w(u)\|^2},$$

que coincide con el valor del parámetro v de los puntos centrales de la superficie. Por tanto, en los puntos centrales el valor absoluto de la curvatura de Gauss es máximo.

3.0.4 Ejemplo: Hiperboloide hiperbólico o de una hoja

El hiperboloide hiperbólico es la cuádrica con ecuación reducida $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Una parametrización de dicha superficie es:

$$r(u,v) = (\cosh v \cos u, \;\; \cosh v \sin u, \;\; \sinh v).$$

Dicha parametrización tiene la desventaja de que no nos muestra las familias de rectas contenidas en la superficie.

Es una superficie doblemente reglada. Se puede construir considerando una recta en cada punto de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$, contenida en el plano rectificante y que forma un ángulo fijo α_0 respecto de la tangente a la curva. Por tanto, podemos parametrizar el hiperboloide como sigue:

$$r(u,v) = c(u) + v\left(\cos(\alpha_0)c'(u) + \sin(\alpha_0)b(u)\right),$$

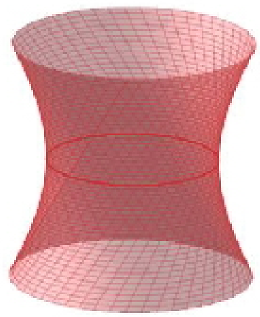
donde $c(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$ y $b(u)$ es el vector binormal de la curva en elpunto $c(u)$, que en este caso es $b(u) = (0,0,1)$. Tomando $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
r(u,v) &= c(u) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}v\left(c'(u) + b(u)\right) \\
&= (\cos(u), \sin(u), 0) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}v(-\sin(u), \cos(u), 1),
\end{aligned}$$

o la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} r(u,v) &= c(u) + \frac{1}{\sqrt{2}} v\left(-c'(u) + b(u)\right) \\ &= (\cos(u), \sin(u), 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} v(\sin(u), -\cos(u), 1). \end{aligned}$$

Es una superficie no desarrollable y la línea de estricción se alcanza cuando $v = 0$, por tanto, es la circunferencia $c(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$.



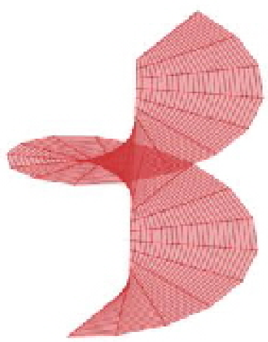
Torre Shukhov (1896), Rusia, de V.Shukhov.

Torre del puerto de Kobe (1963), Japón.

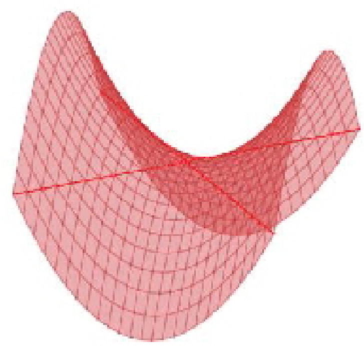
4 Ejemplos

Helicoide. Superficie formada por las rectas que se apoyan en la hélice de ecuación $\vec{\alpha}(u) = (\cos u,\ \sin u,\ u)$, $u \geq 0$, paralelas al plano $z = 0$ y que se apoyan en el eje OZ.

Paraboloide hiperbólico, cuádrica con ecuación reducida $x^2 - y^2 = z$ cuyas secciones con los planos coordenados $y = y_0$ ó $x = x_0$ son parábolas y cuyas intersecciones con planos $z = z_0$ son hipérbolas.

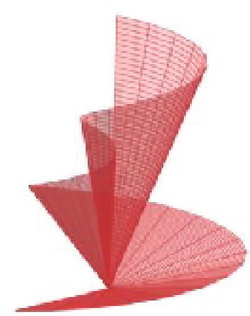


Helicoide



Paraboloide hiperbólico

Cono y cilindro generalizado.



$$r(u,v) = \left(\tfrac{1}{10}\cos(8u) + \cos(u), \tfrac{1}{10}\sin(8u) + \sin(u), u+v\right), \quad r(u,v) = \left(\tfrac{1}{3}v\cos(u), \tfrac{1}{3}v\sin(u), \tfrac{1}{4}uv\right).$$

5 Resumen

Sea S una superficie desarrollable con parametrización

$$r(u,v)=c(u)+vw(u), \quad \text{suponemos } ||w(u)||=1.$$

Curvatura de Gauss de S en P:

$$\begin{aligned} K_G(u,v) &= -\tfrac{1}{\|r_u(u,v)\wedge r_v(u,v)\|^4}\left(w'(u)\cdot(c'(u)\wedge w(u))\right)^2 \\ &= -\tfrac{1}{\|r_u(u,v)\wedge r_v(u,v)\|^4}[c'(u),w(u),w'(u)]^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Parámetro de distribución:

$$p(u)=[c'(u),w(u),w'(u)],$$

donde $[c'(u),w(u),w'(u)]$ es el producto mixto de los vectores $w'(u),c'(u),w(u)$.

Clasificación:

1. $p(u)$ no idénticamente nulo, la superficie es no desarrollable.
2. $p\equiv 0$, la superficie es desarrollable.
   (a) $c'\equiv 0$, la superficie es un cono generalizado.
   (b) $w'\equiv 0$ (y $c'(u)\neq 0$ para algún u) la superficie es un cilindro generalizado
   (c) **Caso genérico** (c' y w' no son indénticamente nulas), entonces

   $$c'(u)=\lambda(u)w(u)+\mu(u)w'(u),$$

   con

   $$\lambda(u)=c'(u)\cdot w'(u), \quad \mu(u)=\frac{c'(u)\cdot w'(u)}{||w'(u)||^2}.$$

   Si $\lambda-\mu'\equiv 0$, entonces la superficie es un cono.
   Si $\lambda-\mu'$ no es idénticamente nula entonces se obtiene la parametrización:

   $$r(u,\bar{v})=\tilde{c}(u)+\bar{v}\tilde{c}'(u), \text{ con } \left\{\begin{array}{l}\tilde{c}(u)=c(u)-\mu(u)w(u)\\ \bar{v}=\frac{v}{\lambda(u)-\mu'(u)}\end{array}\right.$$

   y la superficie es una desarrollable tangencial.

Arista de retroceso: Los puntos singulares de una superficie desarrollable tangencial con parametrización

$$r(u, \bar{v}) = \tilde{c}(u) + \bar{v}\tilde{c}'(u),$$

se alcanzan cuando $\bar{v} = 0$; esto es, en la curve $\tilde{c}(u)$:

$$\tilde{c}(u) = c(u) - \frac{c'(u) \cdot w'(u)}{||w'(u)||^2} w(u)$$

Línea de estricción en una superficie reglada no desarrollable con parametrización

$$r(u, v) = c(u) + vw(u)$$

es la línea con parametrización

$$\beta(u) = c(u) - \frac{(c'(u) \wedge w(u)) \cdot (w'(u) \wedge w(u))}{\|w'(u) \wedge w(u)\|^2} w(u),$$

en la que se encuentran los puntos singulares de la superficie y los puntos centrales (puntos donde $|K_G(u, v)|$ alcanza su valor máximo).

6 Problemas

1. Obtener una representación paramétrica regular de la superficie formada por las rectas que se apoyan en la elipse de ecuaciones cartesianas: $4x^2 + 2y^2 = 3$, $z = 0$ y que son paralelas a la recta de ecuaciones $x + y + z = 1$ y $x - 2y = 0$.

2. Obtener una parametrización de la superficie engendrada por las rectas tangentes a la curva $\vec{\gamma}(u) = (e^u, e^{-u}, u)$.

3. Clasificar la superficie con parametrización:

$$\vec{r}(u, v) = \left(u + v \cos u,\ u^2 + v \sin u,\ u^3\right).$$

   Hallar los puntos singulares de la superficie y la línea de estricción.

7 Bibliografía

1. M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces,* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1976.

2. A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*, E. Chapman &Hall/CRC, 2006.

3. B. O'Neill, *Elementos de Geometría diferencial*, Noriega Editores, 1990.

4. H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian, *Architectural Geometry,* Bentley Institute Press, Exton, Pensilvania USA, 2007.

5. J. M. Rodriguez-Sanjurjo, J. M. Ruiz, *Introducción a la Geomería Diferencial, II. Superficies.* (libro en preparación).

6. Dirk J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry,* Dover Publications, Inc., N.Y., 1961.