

# Escalas generadas y la dualidad de Christoffel

**Manuel Domínguez Romero**

Departamento de Matemática Aplicada a la Edificación, al Medio Ambiente y al Urbanismo,  
E.T.S.Arquitectura, U.P.M.

## ABSTRACT

La presente charla combina nociones y resultados de dos ramas muy diferenciadas: la teoría de conjuntos diatónicos (en concreto la teoría de escalas generadas) y la combinatoria algebraica de palabras.

La representación de las notas como puntos sobre una circunferencia, y de las escalas musicales como secuencias ordenadas de puntos sobre dicha circunferencia, permite acercarse al estudio de las escalas musicales desde un punto de vista geométrico. En particular, las escalas generadas se representan mediante líneas poligonales regulares circunscritas. Estas escalas dividen a la circunferencia en arcos que pueden ser, a lo más, de tres longitudes distintas (teorema de los tres pasos). Resulta llamativo observar cómo juega un papel clave en este teorema el desarrollo en fracciones simples y los convergentes del generador de la escala.

Las escalas generadas que poseen unas propiedades más interesantes son las escalas de dos pasos. Las secuencias de pasos de estas escalas (paso largo-paso corto) resulta ser de un tipo central en la combinatoria algebraica de palabras: son palabras de Christoffel. Se explicarán las propiedades esenciales de este tipo de palabras en conexión con las correspondientes propiedades de las escalas de dos pasos. Se introducirá la noción de dualidad entre palabras de Christoffel. Esta noción tiene una interpretación musical clara: es la relación que se puede establecer entre escala y serie de quintas, esto es, entre la *melodía* y la *armonía* que establece una escala. La necesidad de extender la dualidad sobre rotaciones de palabras de Christoffel y sobre palabras de pendiente irracional (palabras de Sturm) presentan problemas que centrarán la última parte de la charla.