

DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

HOJA 2

1. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones $f : \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 - a. $f(x, y) = \ln(x + y)$
 - b. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
 - c. $f(x, y) = e^{x^2 + 3y^3 + 5}$
 - d. $f(x, y) = y \cos(x - y)$
2. Hallar la derivada direccional de la función f en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector $u = (\cos \theta, \sin \theta)$
 - a. $f(x, y) = y^2 + x^2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$
 - b. $f(x, y) = \sin(2x - y), \quad \theta = \frac{-\pi}{6}$
 - c. $f(x, y) = xe^y, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$
3. Hallar la derivada direccional de la función f en el punto P en la dirección del vector u
 - a. $f(x, y) = 4y^2 + x^2, \quad P = (3, 1), u = (1, -1)$
 - b. $f(x, y) = \cos(y + x), \quad P = (0, \pi), u = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
4. Dada la función $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ se pide
 - a. Estudiar su diferenciabilidad.
 - b. El vector gradiente en el punto $(1, 2)$.
 - c. La derivada direccional de la función f en el punto $(1, 2)$ en la dirección del vector $u = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$
 - d. El plano tangente y la recta normal a la superficie en $(1, 2, f(1, 2))$
5. Dada la función $f(x, y) = 10\sqrt[5]{x^2 y}$ se pide
 - a. Estudiar su diferenciabilidad en $(0, 0)$.
 - b. El vector gradiente en el punto $(4, 2)$.
 - c. La derivada direccional de la función f en el punto $(4, 2)$ en la dirección del vector $u = (\cos \theta, \sin \theta)$.
 - d. El plano tangente y la recta normal a la superficie en $(4, 2, f(4, 2))$.
6. Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ se pide

- Estudiar su continuidad.
- Estudiar la existencia de las derivadas parciales de primer orden.
- Estudiar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada direccional en el punto $(0,0)$, según una dirección arbitraria α
- Calcular la derivada direccional en el punto $(1,1)$, en la dirección del vector $u = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$
- El plano tangente y la recta normal a la superficie en $(1,1, f(1,1))$.

7. Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ se pide

- Estudiar su continuidad.
- Estudiar la existencia de las derivadas parciales de primer orden.
- Estudiar su diferenciabilidad.

8. Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ se pide

- Estudiar su continuidad.
- Estudiar la existencia de las derivadas parciales de primer orden.
- Estudiar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada direccional en el punto $(0,0)$, en la dirección del vector $u = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$
- Calcular la derivada direccional en el punto $(1,0)$, en la dirección del vector $u = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. ¿En qué dirección es máxima? Calcular su valor en ese caso.

9. Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3(y-1)^3}{x^2 + (y-1)^2} & (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & (x, y) = (0, 1) \end{cases}$ se pide

- Estudiar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada direccional en el punto $(0,1)$, en la dirección del vector $u = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$.
- Determinar el plano tangente a la superficie en el punto $(0,0, f(0,0))$

10. Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2xy^2}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ se pide

- Estudiar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada direccional en el punto $(0,0)$, en la dirección del vector $u = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$.