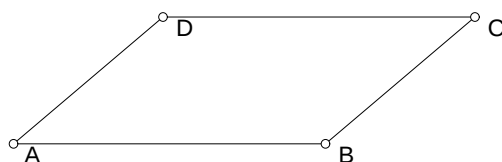
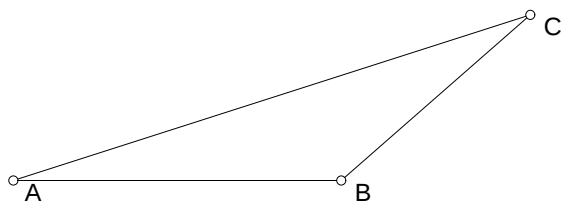


ESPACIO AFÍN (hoja 1)

1. 1. Sea P un paralelogramo de vértices A, B, C, D y $R = (A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\})$ la referencia afín del plano ordinario.
 - a. Halla las coordenadas de los vértices del paralelogramo respecto de R .
 - b. Obtén las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los lados de P .
 - c. Demuestra que las diagonales de P se cortan en su punto medio.
 - d. Demuestra que la figura P' , resultante de unir los puntos medios de los lados de P , es también un paralelogramo. (Caso particular del teorema de Varignon)



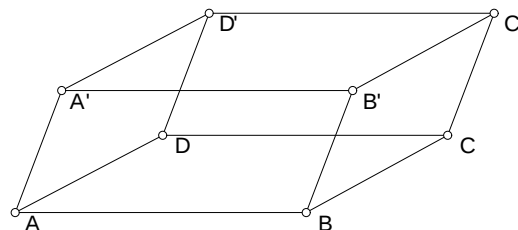
2. Sea T un triángulo de vértices A, B, C y $R = (A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\})$ la referencia afín del plano ordinario.
 1. a. Halla las coordenadas de los vértices de T respecto de R .
 - b. Determinar las coordenadas del baricentro de T , G , y comprobar que este punto divide a cada una de las medianas en dos segmentos en proporción $2 : 1$.
 - c. Comprueba que las coordenadas de G se obtienen como $\frac{1}{3}(A + B + C)$.
 - d. Comprueba que los vectores que unen G con cada uno de los vértices suman $\vec{0}$.
 - e. Comprueba que los triángulos ABC y MNP siendo M, N, P los puntos medios de los lados de T , tienen el mismo baricentro. (El triángulo MNP se conoce como triángulo medial).



3. En el espacio afín ordinario se considera la referencia afín $R = (A; \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\})$ situada en el paralelepípedo P de vértices $A, B, C, D, A', B', C', D'$. Se pide:
 1. a. Coordenadas de los vértices.
 - b. Ecuaciones de los planos π_1 y π_2 determinados por los puntos A', B, D y C, B', D' respectivamente.
 - c. Los puntos de intersección, I y J de los planos π_1 y π_2 con la recta r determinada por los puntos A y C' .
 - d. La posición relativa de π_1 y π_2 .
 - e. Los baricentros de los triángulos $A'BD$ y $CB'D'$.

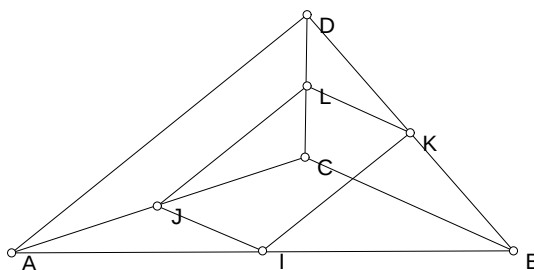
f. Comprobar que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JC'}$.

g. Expresión del cambio de sistema de referencia de R' a R siendo $R' = (B; \{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BB'}\})$.



4. Dado el tetraedro $ABCD$ se considera el sistema de referencia $R' = (A; \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\})$. Sean I, J, K, L los puntos medios de las aristas AB, AC, BD y CD respectivamente.

1. a. Obtén la ecuación del plano π que pasa por L y es paralelo a las rectas r y s determinadas por A, D y B, C respectivamente.
- b. Comprueba que π corta a las aristas no paralelas a él en los puntos I, J, K, L . ¿ I, J, K, L forman un paralelogramo?



ESPACIO AFÍN. (hoja 2)

5. En el plano ordinario se considera el sistema de referencia $R = (O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$. Se pide:
- Ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $A = (7, 1)$ y cuyo vector de dirección es $\vec{v} = (2, -3)$.
 - Ecuación de la recta paralela a r que pasa por el origen.
 - La intersección de r con la recta $s : x + y + 1 = 0$.
 - Ecuación del haz de rectas determinado por r y s .
6. En el espacio afín ordinario se considera el sistema de referencia $R = (O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\})$. Se pide
- Ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(0, -1, 1)$ y es paralela a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$.
 - Ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(1, 4, 0)$ y es paralelo al plano $x - 2y + z + 3 = 0$.
 - Halla la intersección de cada uno de los planos coordenados con la recta $\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$.
 - Posición relativa de las rectas $r = \{X \in \mathbb{R}^3 / X = (1, 0, 1) + \alpha(2, 0, -1)\}$ y $s = \{X \in \mathbb{R}^3 / X = (2, 1, -3) + \alpha(1, -2, -4)\}$.
 - La posición relativa de los planos π y π' que pasan por los puntos $A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 0), C = (0, 0, -3)$ y por los puntos $A' = (0, -4, 0), B' = (0, 0, 6), C' = (-2, 0, 0)$ respectivamente.
 - La ecuación del plano determinado por las rectas $r' : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $s' : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{1}$.
 - Ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 4)$ y $(0, 1, 5)$ y es paralelo a la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3}$.
 - Determina la posición relativa de las rectas $r'' : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha + 3 \end{cases}$ y $s'' : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.
 - ¿Pertenece el plano $x - 2y + 3z + 2 = 0$ al haz de planos cuyo eje es la recta $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$?
7. En el espacio afín ordinario se considera la familia de planos

$$H : mx + (m - 2)y - 3(m + 1)z + m + 4 = 0$$

- Halla la ecuaciones cartesianas de la recta que tienen en común los planos de esta familia.
- Determina el plano de H que pasa por el punto $P = (1, -1, 0)$.
- Determina los planos de esta familia que son paralelos a la recta $\begin{cases} x + 3z - 1 = 0 \\ y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$.

8. En el espacio afín ordinario se considera el sistema de referencia $R = (O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\})$ y los puntos $P_0 = (1, 1, 2), P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (-1, 1, 1), P_3 = (3, 1, -2)$.

- Comprueba que los puntos P_0, P_1, P_2, P_3 son independientes.

- b. Sea $R' = (P_0; \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\})$ otra referencia del espacio. Obtén las ecuaciones del cambio de referencia de R a R' y de R' a R .
- c. Si el plano π tiene de ecuación $x_1 - 4x_2 - x_3 + 1 = 0$ respecto de la referencia R , halla la expresión del plano en la referencia R' .
9. En el espacio afín (E, V) se considera el sistema de referencia $R = (O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\})$. Se pide:
1. a. Las ecuaciones cartesianas del subespacio afín que contiene al punto $P_1 = (1, 1, 0, -1)$ y a la recta $r_1 = \{X \in E/X = (0, 0, 0, 3) + \alpha(1, 0, 1, 1)\}$
 - b. Ecuación cartesiana del subespacio que contiene a los puntos $P_1 = (1, 1, 0, -1)$ y $P_2 = (0, 2, 0, 1)$ y a la recta r_1 .
 - c. Ecuaciones cartesianas del plano π_1 que contiene a los puntos $P_1 = (1, 1, 0, -1)$, $P_2 = (0, 2, 0, 1)$ y $P_3 = (1, 1, 0, 0)$
 - d. Ecuaciones cartesianas del subespacio afín que contiene a π_1 y pasa por el origen de la referencia.
 - e. Ecuaciones cartesianas del subespacio afín $\pi_1 + \pi_2$ y $\pi_1 \cap \pi_2$ siendo $\pi_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0. \\ x_1 + x_4 - 2 = 0. \end{cases}$
 - f. Ecuaciones del subespacio afín paralelo a $F_1 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 1 = 0 \\ x_3 - 3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \end{cases}$ que pasa por el punto $P_1 = (1, 1, 0, -1)$.
 - g. Ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial asociado al subespacio afín $F_2 = \{X \in E/X = (0, 1, 0, 3) + \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(-1, 2, 1, 0)\}$.
10. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1, 1)$, es coplanaria a la recta $r = \{X \in \mathbb{R}^3/X = (1, 0, 0) + \alpha(1, 2, 3)\}$ y es paralela al plano $-x + 2y + z = 0$

1. ESPACIO AFÍN. APLICACIONES AFINES.

(hoja 3)

11. Se consideran los espacios afines $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con referencias afines $R_1 = (O_1; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ y $R_2 = (O_2; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$ respectivamente y la aplicación afín f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{aligned}f(3, 1) &= (0, 1, 1) \\f(4, 3) &= (-1, 3, 2) \\f(2, 2) &= (1, 2, 3)\end{aligned}$$

- Halla la expresión matricial de f .
- ¿Es f una aplicación inyectiva?
- Halla la imagen de la recta $r : 2x_1 + x_2 - 3 = 0$

12. Sea T el triángulo de vértices $A = (1, 1), B = (2, 3), C = (2, 0)$ respecto de la referencia afín del plano ordinario $R = (O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$. Se considera la aplicación afín del plano que transforma el triángulo T en el triángulo T' de vértices $A' = (-3, 2), B' = (9, 11), C' = (0, -1)$. Se pide:

- Ecuaciones de la aplicación afín. Clasificación.
- Halla la imagen de las rectas que sustentan los lados del triángulo T .
- Halla la imagen de la mediana correspondiente al vértice A .
- ¿Hay alguna relación entre el baricentro de T y el de T' ?

13. En el plano afín ordinario con referencia $R = (O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ se considera la traslación t de vector $v = (2, 5)$ y la homotecia H_k^C de centro $C = (1, 3)$ y razón $k = 4$. Se pide:

- Ecuaciones de las dos transformaciones.
- $t(r)$ y $H_k^C(r)$ siendo r la recta $x - y + 2 = 0$.
- $t(s)$ y $H_k^C(s)$ siendo r la recta $5x - y + 1 = 0$.
- Los subespacios afines invariantes de ambas transformaciones.
- Ecuación y clasificación de $t \circ H_k^C$ y de $H_k^C \circ t$.
- Las aplicaciones inversas de t , H_k^C , $t \circ H_k^C$ y $H_k^C \circ t$.

14. Sea T el triángulo de vértices A, B, C y $R = (A, \{\vec{AB}, \vec{AC}\})$ la referencia afín del plano ordinario E . Se considera la homotecia f de E en E que transforma el triángulo T en su triángulo medial de forma que $f(A) = M_{BC}$, M_{BC} es el punto medio del segmento BC .

- Halla la expresión matricial de f .
- ¿Tiene puntos fijos la aplicación f ?

15. Halla la ecuación de una aplicación afín que transforme la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. ¿Tiene puntos fijos la transformación definida? ¿Es biyectiva? En caso afirmativo determina la ecuación de f^{-1} .

16. Estudia los subespacios invariantes de la transformación afín del plano afín ordinario E , cuya

expresión respecto de la referencia $R = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ es:

$$f(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} X.$$

17. En el espacio afín ordinario E se considera la transformación afín que deja invariantes los puntos del plano $\pi: x - y + z - 2 = 0$ y transforma el punto $A = (1, -2, 1)$ en el punto $A' = (0, -1, 3)$. Halla la ecuación de la transformación y clasifícala. Si es biyectiva determina f^{-1} .

18. En el espacio afín ordinario E con referencia $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se considera la homotecia f de E determinada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= -6 + 4x \\ y' &= -9 + 4y \\ z' &= -15 + 4z \end{aligned}$$

Halla el centro y la razón de f .

a. Obtén los puntos fijos y los subespacios invariantes de la aplicación.

b. Compara el plano $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ con $f(\pi)$.

19. En el espacio afín ordinario E con referencia $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se considera el tetraedro de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (1, 1, 1)$ y la homotecia f de E con centro en el vértice D que transforma B en $B' = \frac{1}{3}(2, 1, 1)$. Determina los vértices del nuevo tetraedro $A'B'C'D'$ y la imagen del plano que contiene a ABC .

20. En el plano afín ordinario E con referencia $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se considera la aplicación afín

$$f(X) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Si $R'_1 = \{O'_1 = (1, 3); \vec{e}'_1 = (2, -1), \vec{e}'_2 = (1, 1)\}$ es otro sistema de referencia de E , halla la expresión de f en R'_1 .

21. En el espacio afín ordinario E con referencia $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se considera la aplicación afín

$$\begin{aligned} x' &= -1 + 4x \\ y' &= -2 + 4y \\ z' &= 3 + 4z \end{aligned}$$

Si $R'_1 = \{O'_1 = (1, 3, 1); \vec{e}'_1 = (2, -1, 0), \vec{e}'_2 = (1, 0, 1), \vec{e}'_3 = (1, 1, 0)\}$ es otro sistema de referencia de E , halla la expresión de f en R'_1 .

22. Se consideran los espacios afines $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con referencias afines $R_1 = (O_1; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ y $R_2 = (O_2; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$ respectivamente y la aplicación afín f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Si $R'_1 = \{O'_1 = (1, 3); \vec{e}'_1 = (2, -1), \vec{e}'_2 = (1, 1)\}$ y $R'_2 = \{O'_2 = (1, 0, 3); \vec{e}'_1 = (1, 1, 1), \vec{e}'_2 = (1, 0, 0), \vec{e}'_3 = (1, 1, 0)\}$ son sistema de referencia de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, halla la expresión de f en R'_1 y R'_2 .