

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES

1. Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales. Si $f : U \rightarrow V$ es una aplicación, indica en qué casos es una aplicación lineal.

1. $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$ $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_3 - x_2, x_1^5 - x_2)$
2. $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^4$ $f((x_1, x_2)) = (2, x_1x_2, 3x_1 - 2x_2, -\sqrt{5}x_1)$
3. $U = \mathbb{M}_2$, $V = \mathbb{R}^3$ $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b + 3c, -a + b, c - 2d)$

2. Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales referidos a sus bases canónicas B_U y B_V respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : U \rightarrow V$, el subespacio vectorial A de U y el subespacio vectorial C de V . Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Ecuaciones, dimensión y una base de $f(A)$
3. $f^{-1}(\vec{y})$, $\vec{y} \in V$.
4. $f^{-1}(C)$.

Para los siguientes casos:

- (a)
$$\begin{cases} U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2 \\ f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 3x_2 - x_3, 2x_1 + x_3) & C = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 + y_2 = 0\} \\ A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0, 3x_2 - x_3 = 0\} & \vec{y} = (-1, 3) \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^3 \\ f((x_1, x_2)) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, 3x_1) & C = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 - 2y_3 = 0\} \\ A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 0\} & \vec{y} = (1, -2, 0) \end{cases}$$
- (c)
$$\begin{cases} U = \mathbb{M}_2, V = \mathbb{R}^3 \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 + x_3, x_1 - x_2) \\ A = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2 / x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\right\} & \vec{y} = (1, 0, 1) \\ C = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 - y_2 - y_3 = 0, y_2 - y_3 = 0\} \end{cases}$$

3. Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son B_U y B_V respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : U \rightarrow V$. Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_U y B_V .

2. Ecuaciones, dimensión y una base de $\text{Im}(f)$.
3. Ecuaciones, dimensión y una base de $\text{Ker}(f)$.

Para los siguientes casos:

- (a) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3, f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3, -x_2 - x_3)$
- (b) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2, f((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, 2x_1 - 2x_2)$
- (c) $U = \mathbb{M}_2, V = \mathbb{P}_3, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b+c+d) + (a+c)x - (a+b)x^2 + (c+d)x^3$
- (d) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{P}_2, f((a, b)) = 2b + ax + (a - b)x^2$
- (e) $\begin{cases} U = \{M \in \mathbb{M}_3 / M \text{ es diagonal}\}, V = \mathbb{R}^3 \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}\right) = (x_2, x_3 - x_1, x_1 + x_2) \end{cases}$

4. Sean $U(\mathbb{R}), V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_U = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_V = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ respectivamente. Se consideran las aplicaciones lineales $f : U \rightarrow V$ y $g : U \rightarrow V$ tales que

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3)) &= (5x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 4x_3, x_1 - 6x_3, 0) \\ g((x_1, x_2, x_3)) &= (2x_3, -x_1 + x_2 + x_3, 0, 4x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Se pide:

1. Expresión matricial de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Expresión matricial de g respecto de las bases B_U y B_V .
3. Expresión matricial de $2f + 3g$ respecto de las bases B_U y B_V .

5. Sea $U(\mathbb{R}), V(\mathbb{R}), W(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_U = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $B_V = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ y $B_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ respectivamente. Se consideran las aplicaciones lineales $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$, tales que

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3)) &= (x_2 - x_3, x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3) \\ g((x_1, x_2, x_3, x_4)) &= (x_3, -x_1 + 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Se pide:

1. Expresión matricial de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Expresión matricial de g respecto de las bases B_V y B_W .
3. Expresión matricial de $g \circ f$ respecto de las bases B_U y B_W .

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES

6.- Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ y $W(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son B_U , B_V y B_W respectivamente. Sean $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ y $h : U \rightarrow V$ aplicaciones lineales. Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Matriz de g respecto de las bases B_V y B_W .
3. Matriz de h respecto de las bases B_U y B_V .
4. Matriz de la aplicación gof respecto de las bases B_U y B_W .
5. Clasificar las aplicaciones f, g, gof .
6. Matriz de la aplicación $3f(x) - 2h(x)$ respecto de las bases B_U y B_V .
7. Matriz de g^{-1} respecto de las bases B_V y B_W .
8. Ecuaciones del cambio de base de B_U a B'_U siendo B'_U base de U
9. Ecuaciones del cambio de base de B_V a B'_V siendo B'_V base de V
10. Matriz de f respecto de las bases B'_U y B'_V
 - (a) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^2$
 $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_3, 4x_2 - 3x_3)$
 $g((x_1, x_2)) = (2x_1, x_1 + x_2)$
 $h((x_1, x_2, x_3)) = (-x_3, x_2)$
 $B'_U = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
 $B'_V = \{(1, 2), (3, -1)\}$
 - (b) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^3$
 $f((x_1, x_2)) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 + x_2, x_1)$
 $g((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_3, 3x_2, x_1 + x_3)$
 $h((x_1, x_2)) = (-5x_1 + x_2, -x_2, x_1)$
 $B'_U = \{(1, 1), (-1, 1)\}$
 $B'_V = \{(1, 2, 0), (1, 3, -1), (0, 2, 0)\}$
 - (c) $U = \mathbb{M}_2, V = \mathbb{P}_3, W = \mathbb{R}^4$
 $f\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = a_1 + (a_2 - a_3)x + (a_3 - a_2)x^2 + a_4x^3$
 $g(b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3) = (b_1 + b_2, b_2 - b_4, -b_3, -b_4)$

$$h\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = (a_4 - a_3) + a_1x + 2a_3x^2 + (a_2 - a_1)x^3$$

$$B'_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B'_V = \{1+x, x^2-x^3, 1-2x^2, 2x+x^3\}$$

$$(d) \ U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{P}_2, W = \mathbb{R}^3$$

$$f((a_1, a_2)) = (a_1 - 3a_2)x^2$$

$$g((b_1 + b_2x + b_3x^2)) = (b_1 + b_3, b_2 - b_3, b_1)$$

$$h((a_1, a_2)) = 2a_1 + a_2 + a_1x - a_2x^2$$

$$B'_U = \{(-1, 3), (-3, 2)\}$$

$$B'_V = \{x, x-1, x^2-2\}$$

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES

7.- Sean $V(\mathbb{R})$ y $W(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_W = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, respectivamente. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$f(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$$

$$f(\vec{e}_3) = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$$

Se consideran las bases $B'_V = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B'_W = \{(1, 2), (3, -1)\}$ de $V(\mathbb{R})$ y $W(\mathbb{R})$ respectivamente, se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_V y B_W .
2. Ecuaciones del cambio de base de B_V a B'_V .
3. Ecuaciones del cambio de base de B_W a B'_W .
4. Matriz de f respecto de las bases B'_V y B'_W .

8.- Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ cuyas bases canónicas son $B_{\mathbb{R}^2} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $B_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \in \text{Ker } f$$

$$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \in f^{-1}(\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3)$$

Si $B'_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ y $B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 2, 0), (1, 3, -1), (0, 2, 0)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases $B_{\mathbb{R}^2}$, $B_{\mathbb{R}^3}$.
2. Ecuaciones del cambio de base de $B_{\mathbb{R}^2}$ a $B'_{\mathbb{R}^2}$.
3. Ecuaciones del cambio de base de $B_{\mathbb{R}^3}$ a $B'_{\mathbb{R}^3}$.
4. Matriz de f respecto de las bases $B'_{\mathbb{R}^2}$, $B'_{\mathbb{R}^3}$.

9. Sean $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{P}_3$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_W = \{1, x, x^2, x^3\}$, respectivamente. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que:

$$\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 1 + 2x - x^2 - 3x^3$$

Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_V y B_W .
2. Clasifica la aplicación f .

10.- Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son B_U y B_V respectivamente. Se considera la familia de aplicaciones lineales $f_\alpha : U \rightarrow V$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Hallar la matriz de f_α respecto de las bases B_U y B_V .
2. Estudiar las dimensiones de los subespacios $\text{Im}(f_\alpha)$ y $\text{Ker}(f_\alpha)$ en función del parámetro α .
3. Clasificar la aplicación según los valores de α .

(a) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^3$

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (\alpha x_1, -x_1 + x_2 - \alpha x_3, \alpha x_2 - x_3)$$

(b) $U = \mathbb{R}^4$, $V = \mathbb{R}^3$

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + \alpha x_2 + x_3, \alpha x_4, -x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 + x_4)$$

(c) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^4$

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + \alpha x_3, x_2 - x_3, \alpha x_1, x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3)$$

11.- Sean $V = \{M \in \mathbb{M}_2/M \text{ es simétrica}\}$, $W = \mathbb{P}_2$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son:

$$B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ con } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_W = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}, \text{ con } \vec{u}_1 = 1, \vec{u}_2 = x, \vec{u}_3 = x^2.$$

Sea $f_m : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que:

$$f_m(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 3\vec{u}_1 + (1 - m)\vec{u}_2 + 6\vec{u}_3$$

$$f_m(-\vec{e}_2) = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

$$f_m(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (1 + m)\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$$

Se pide:

1. Hallar la expresión matricial de f_m en las bases dadas.
2. ¿Para qué valores de m no se puede definir la aplicación lineal f_m^{-1} ?
3. Estudiar el subespacio vectorial $\text{Ker}(f_m)$ en función de m .
4. Determinar los valores de m para los cuales $p(x) = -2 + 6x^2$ pertenece al subespacio vectorial $\text{Im}(f_m)$.
5. Hallar la expresión matricial de f_1 respecto de las bases

$$B_V \text{ y } B'_W = \{1 - x^2, x^2, x + x^2\}.$$

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES

12. Decide si el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

13. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Estudia los autovalores de la matriz A .
2. ¿Es f diagonalizable?
3. Calcula la matriz del endomorfismo f^{10} respecto de la base B .

14. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ referido a la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

1. El vector $\vec{e}_3$ es vector propio del autovalor $\lambda = a - 3$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(\vec{e}_1) &= 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) &= -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{aligned}$$

2. Halla la matriz de f respecto de la base B .
3. Estudia los autovalores de f en función del parámetro a .
4. Obtén los valores de a para los cuales f es diagonalizable.
5. Para $a = 4$ halla una base de vectores propios y la matriz diagonal de f respecto de dicha base.

15. Sabiendo que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo diagonalizable tal que $W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$ son subespacios propios de f con los autovalores de f^{-1} son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad 1 determina la matriz de f en la base canónica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

16. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$. Determina la matriz de f en la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sabiendo que:

1. (a) i. $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 0\}$ es un subespacio propio de f .

$$\text{Dicha matriz es semejante a la matriz } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1 + e_2) = 2e_1 + e_2 + e_3$$

17. Se considera el espacio vectorial $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y el endomorfismo de V definido de la siguiente manera:

$$f \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2a + b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ (m+1)a + 2b + 2c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de $m \in \mathbb{R}$, el endomorfismo es diagonalizable?

18. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ referido a la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

El núcleo de f es el subespacio de ecuaciones en B , $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

El subespacio generado por $\{\vec{e}_3\}$, es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$.
 $f(e_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

1. Obtén la expresión matricial de f respecto de la base B .
2. Razona si f es sobreyectiva.
3. Determina la expresión matricial de f respecto de la base $B' = \{\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2 - \vec{e}_3, 2\vec{e}_2\}$.

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES

19. En el espacio tridimensional V se considera el endomorfismo f de V y la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Sabiendo que la matriz de f respecto de la base $B' = \{\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_3\}$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Ecuaciones cartesianas de los subespacios propios de f respecto de la base B .
2. Matriz de f respecto de la base B .

20. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿ A y B son matrices semejantes?. Razona la respuesta.

21. Demuestra los siguientes enunciados:

1. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si f es biyectivo entonces todos sus autovalores son distintos de cero.
2. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si f es inyectivo entonces todos sus autovalores son distintos de cero.
3. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si f es sobreyectivo entonces todos sus autovalores son distintos de cero.
4. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si λ es autovalor de f entonces para $k \in \mathbb{R}$, $k\lambda$ es autovalor del endomorfismo kf .
5. Sea $f : V \longrightarrow V$ un automorfismo. Si λ es autovalor de f entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de f^{-1} .
6. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si λ es autovalor de f entonces λ^2 es autovalor del endomorfismo f^2 .

7. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si λ es autovalor de f entonces para $k \in \mathbb{R}$, $\lambda - k$ es autovalor del endomorfismo $f - ki$.
8. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si $\vec{v}$ es un vector propio de f asociado al valor propio λ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $\vec{v}$ es un vector propio del endomorfismo kf asociado al valor propio $k\lambda$.
9. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si $\vec{v}$ es un vector propio de f asociado al valor propio λ entonces $\vec{v}$ es vector propio del endomorfismo f^2 asociado al valor propio λ^2 .
10. Sean $f : V \longrightarrow V$ y $h : V \longrightarrow V$ endomorfismos. Si $\vec{v}$ es vector propio de ambos endomorfismos entonces es vector propio del endomorfismo $f - h$.