

GEOMETRÍA curso 10/11

Espacios Vectoriales Opción A

Apellidos:.....

Nombre:.....

1. Se considera el espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ y la base $B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.

Sea W el subespacio vectorial de V generado por el sistema de vectores

$$\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3 + \vec{e}_4, 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4\}$$

y W' el subespacio vectorial de V de ecuaciones cartesianas $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Se pide:

- (a) Ecuaciones paramétricas y una base de $W \cap W'$.
- (b) ¿Son independientes los subespacios W y W' ? Razona la respuesta.
- (c) Ecuaciones cartesianas y una base de $W + W'$.

SOLUCIÓN

El conjunto $S = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3 + \vec{e}_4, 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4\} = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (2,2,-3,-3)\}$ es ligado y su rango es 2

$B_W = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$ es libre y genera W por tanto es una base de W :

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } W \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = k \\ x_4 = k \end{cases}$$

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } W \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } W \cap W' \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Base de $W \cap W'$, $B = \{(1,1,1,1)\}$

La dimensión de la intersección no es cero por tanto no son independientes.

Ecuaciones cartesianas de W' $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$B_{W'} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_2\}$ base de W'

$\{\vec{e}_1 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3 + \vec{e}_4\} = \{(1,0,1,1), (0,1,0,0), (1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$ sistema generador de $W + W'$, es ligado.

$B_{W+W'} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\} = \{(1,0,1,1), (0,1,0,0), (1,1,0,0)\}$ base de $W + W'$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ Ecuación cartesiana de } W + W' : -x_3 + x_4 = 0$$

GEOMETRÍA curso 10/11

Espacios Vectoriales Opción B

Apellidos:.....

Nombre:.....

1. Se considera el espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ y la base $B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.

Sea W el subespacio vectorial de V generado por el sistema de vectores

$$\{\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4\}$$

y W' el subespacio vectorial de V de ecuaciones cartesianas
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

- (a) Ecuaciones paramétricas y una base de $W \cap W'$.
- (b) ¿Son independientes los subespacios W y W' ? Razona la respuesta.
- (c) Ecuaciones cartesianas y una base de $W + W'$.

SOLUCIÓN

El conjunto $S = \{\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4\} = \{(0,1,1,0), (1,0,0,-1), (1,3,-3,-1)\}$ es ligado y su rango es 2

$B_W = \{\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_4\}$ es libre y genera W por tanto es una base de W :

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } W \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = k \\ x_3 = k \\ x_4 = -t \end{cases}$$

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } W \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$W \cap W' \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \text{ sistema de ecuaciones cuya solución es } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$W \cap W' = \{(0,0,0,0)\}$$

La dimensión de la intersección es cero por tanto son independientes.

Usando la fórmula de Grassman $\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') = 2 + 2 - 0 = 4$

$W + W' = V$ y una base es $B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$: