

ALGEBRA LINEAL:

1. (1,5 punto) Sea V un espacio vectorial real con $\dim(V) = n$.

(a) Define sistema de vectores linealmente independiente.

Solución. Un sistema de vectores S se dice que es linealmente independiente si ningún vector de S se puede escribir como combinación lineal del resto.

(b) Demuestra que las coordenadas de $\vec{v} \in V$ respecto de una base de V son únicas.

Solución. Supongamos que las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de una base $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ son $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \dots, \beta_n)$; esto es,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n \\ &= \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_n \vec{e}_n.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{e}_n.$$

Como B es una base, es linealmente independiente y por tanto,

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0.$$

2. (0,5 punto) Definir suma directa de subespacios.

Solución. Se dice que la suma de dos subespacios vectoriales W y W' es directa si $W \cap W' = \{\vec{0}\}$.

3. (1,5 punto) Sea V un espacio vectorial real y sea W un subespacio vectorial de V . Definir subespacio complementario de W . ¿Existe siempre un subespacio complementario a W ? ¿Es dicho subespacio complementario único? Razona la respuestas.

Solución. Un subespacio complementario a un subespacio W de V es un subespacio tal que:

$$W \oplus W' = V.$$

Siempre existe un subespacio complementario a uno dado porque si B_1 es una base de W siempre podemos completar esa base hasta obtener una base de V . Los vectores con los que hemos completado dicha base generan el subespacio complementario.

Dicho subespacio no es único. Por ejemplo, sea un espacio vectorial V con base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, los subespacios $W' = \mathcal{L}(\{\vec{e}_1\})$ y $W'' = \mathcal{L}(\{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\})$ son dos subespacios complementarios de $W = \mathcal{L}(\{\vec{e}_2\})$ y $W' \neq W''$.

4. (2 puntos) Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ y sea B la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Se considera el subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones paramétricas:

$$S \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta, \\ x_2 = \beta, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

y el subespacio vectorial T de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones cartesianas:

$$T \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

- (a) Hallar las ecuaciones cartesianas de S y las ecuaciones paramétricas de T .

Solución. Las ecuaciones cartesianas de S son: $x_2 = x_3$ y $x_3 = x_4$.

- (b) Calcular una base de $S \cap T$ y las ecuaciones cartesianas de $S + T$.

Solución.

$$\begin{aligned} S \cap T &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3, x_3 = x_4, x_1 + 2x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3, x_3 = x_4, x_1 + 2x_2 = 0\} \end{aligned}$$

Una base de $S \cap T$ es $\{(-2, 1, 1, 1)\}$.

$$\begin{aligned} S + T &= \mathcal{L}(\{(1, 0, 0, 0), (-2, 1, 1, 1), (-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(1, 0, 0, 0), (-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}). \end{aligned}$$

La ecuación cartesiana de $S + T$ es:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = x_3 - x_4.$$

- (c) ¿Son S y T subespacios complementarios? Razona la respuesta.

Solución. No, porque $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$.

5. (1 punto) Sean tres espacios vectoriales reales V , V' y V'' . Se consideran las siguientes aplicaciones lineales:

$$f: V \longrightarrow V' \text{ y } g: V' \longrightarrow V''.$$

Demostrar que si un vector $\vec{v}$ pertenece al núcleo de f (esto es, $\vec{v} \in \ker(f)$) entonces se verifica que $\vec{v}$ pertenece al núcleo de la composición $g \circ f$ (esto es, $\vec{v} \in \ker(g \circ f)$).

Solución.

$$(g \circ f)(\vec{v}) = g(f(\vec{v})) = g(\vec{0}) \text{ pues } \vec{v} \in \ker(f)$$

y como $g(\vec{0}) = \vec{0}$ pues g es una aplicación lineal, se tiene $\vec{v} \in \ker(g \circ f)$.

6. (2,5 puntos) Sea $P_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales (esto es, $P_2(x) = \mathbb{R}_2[x]$) y sea $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales.

Se considera el siguiente subespacio vectorial M de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2} \mid a = d \right\},$$

y la aplicación $f: P_2(x) \longrightarrow M$ dada por:

$$f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (a) Demostrar que f es una aplicación lineal.

Solución.

$$\begin{aligned} & f(\alpha(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta(a_2 + b_2x + c_2x^2)) \\ &= f(\alpha(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta(a_2 + b_2x + c_2x^2)) \\ &= f((\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)x + (\alpha c_1 + \beta c_2)x^2) \\ &= \begin{pmatrix} 2(\alpha a_1 + \beta a_2) & (\alpha b_1 + \beta b_2) \\ (\alpha b_1 + \beta b_2) & 2(\alpha a_1 + \beta a_2) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 \\ b_1 & 2a_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2a_2 & b_2 \\ b_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta f(a_2 + b_2x + c_2x^2). \end{aligned}$$

- (b) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base $B_1 = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(x)$ y la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de M .

Solución.

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f(x^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$M_{B_1 B_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio $\ker(f)$ y las ecuaciones cartesianas del subespacio $\text{Im}(f)$.

Solución.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \mathcal{L}(\{f(1), f(x), f(x^2)\}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tales que } a = d \text{ y } b = c \right\}. \\ \ker(f) &= \mathcal{L}(\{x^2\}) \\ &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \text{ tales que } a = b = 0\}. \end{aligned}$$

(d) ¿Es f una aplicación inyectiva? Razona la respuesta.

Solución. No porque $\ker(f) \neq \{0\}$.

(e) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base $B'_1 = \{1, 1+x^2, 1-x\}$ de $P_2(x)$ y la base B_2 de M .

Solución.

$$\begin{aligned}f(1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\f(1+x^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\f(1-x) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$M_{B'_1 B_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. (1 puntos) Sea V un espacio vectorial tridimensional real, sea $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ una base de V , y sea f un endomorfismo de V tal que:

$$\begin{aligned}f(\vec{u}) &= 2\vec{u}, \\ \vec{v} &\in \ker(f) \\ f(\vec{w}) &= \vec{u} + \vec{v}.\end{aligned}$$

Se pide determinar la expresión matricial de f en la base B .

Solución.

Como

$$\begin{aligned}f(\vec{u}) &= 2\vec{u} = 2\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}, \\ f(\vec{v}) &= \vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}, \\ f(\vec{w}) &= \vec{u} + \vec{v} = 1\vec{u} + 1\vec{v} + 0\vec{w},\end{aligned}$$

se tiene:

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto si (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de un vector $\vec{x}$ en la base B y (y_1, y_2, y_3) son las coordenadas de $f(\vec{x})$ en la base B se tiene:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$