

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (2,5 puntos) Se considera la superficie S con representación paramétrica

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + \sin v), \quad v \in [0, 2\pi), \quad u \in [-2, 2].$$

Se pide:

- Determinar los puntos singulares.
- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P de coordenadas $(1, 0, 1)$.
- Matriz de la primera forma fundamental en el punto P .
- Matriz de la segunda forma fundamental en el punto P .
- Clasificar el punto P .
- Direcciones principales y direcciones asintóticas en el punto P .

Solución.

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u, v) &= (1, 0, 2u^2), \\ \vec{r}_v(u, v) &= (0, 1, \cos v), \\ \vec{r}_{uu}(u, v) &= (1, 0, 4u), \\ \vec{r}_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ \vec{r}_{vv}(u, v) &= (0, 0, -\sin v),\end{aligned}$$

$$\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u^2 \\ 0 & 1 & \cos v \end{vmatrix} = (-2u^2, -\cos v, 1),$$

$$\|\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v)\| = \sqrt{4u^4 + \cos^2 v},$$

$$\vec{N}(u, v) = \left(-2\frac{u^2}{\sqrt{4u^4 + \cos^2 v}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{4u^4 + \cos^2 v}}, \frac{1}{\sqrt{4u^4 + \cos^2 v}} \right),$$

$$\vec{N}(1, 0) = \left(-2\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right),$$

$$E(1, 0) = \vec{r}_u(1, 0) \cdot \vec{r}_u(1, 0) = (1, 0, 2) \cdot (1, 0, 2) = 5$$

$$F(1, 0) = \vec{r}_v(1, 0) \cdot \vec{r}_u(1, 0) = (0, 1, 1) \cdot (1, 0, 2) = 2,$$

$$G(1, 0) = \vec{r}_v(1, 0) \cdot \vec{r}_v(1, 0) = (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 2,$$

$$L(1, 0) = \vec{r}_{uu}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$M(1, 0) = \vec{r}_{uv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = 0,$$

$$N(1, 0) = \vec{r}_{vv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = 0,$$

$$I_P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad II_P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Direcciones asintóticas:

$$\begin{aligned} 0 &= Lh^2 + 2Mhk + Nk^2, \\ 0 &= \frac{2}{\sqrt{5}}h^2 \implies (0, 1) \text{ es la dirección asintótica} \end{aligned}$$

Direcciones principales: $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

Curvaturas principales: $k_1 = 0$ y

$$k_2(1, 0) = \frac{II_P((1, 0))}{I_P((1, 0), (1, 0))} = \frac{(1, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1, 0) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{5} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

2. (1,5 puntos) Determinénse las ecuaciones paramétricas de la superficie engendrada por los segmentos de recta paralelos al plano $x = 0$, que unen la curva de ecuaciones $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$ con la curva de ecuaciones $z = x + 2$, $y = 0$. Clasificar la superficie reglada obtenida.
3. (0,6 puntos) Sea el toro engendrado al girar alrededor del eje OZ la circunferencia $(y - 2)^2 + z^2 = 1$, $x = 0$. Decir de qué tipo es cada uno de los siguientes puntos:
 - (a) $(0, 1, 0)$
 - (b) $(2, 0, 1)$
 - (c) $(0, -3, 0)$
4. (0,4 puntos) Señálense las afirmaciones correctas acerca de las direcciones asintóticas en un punto P de una superficie.
 - (a) P elíptico $\implies$ no existen direcciones asintóticas.
 - (b) P elíptico $\implies$ existe una única dirección asintótica.
 - (c) P hiperbólico $\implies$ existe una única dirección asintótica.
 - (d) P parabólico $\implies$ una de las direcciones principales es una dirección asintótica.