

TEMA: CURVAS

1. Señálese la ecuación del plano osculador en $t = \pi/12$ a la curva de $\mathbb{R}^3$ con parametrización:

$$\vec{r}(t) = \left(t^2 \sqrt{t^2 + 1} \sin^2 t, t^2 \sqrt{t^2 + 1}, t^2 \sqrt{t^2 + 1} \cos^2 t \right), \quad t \in [0, 2\pi).$$

- | | | |
|---------------------|---|---------------------|
| (a) $y = 0$ | (b) $x = \lambda, y = \lambda, z = 2\lambda$ | (c) $x + y + z = 0$ |
| (d) $x - y + z = 0$ | (e) $\sqrt{3}x + \pi^3 y + \sqrt{\pi^2 + 1}z = 1$ | (f) $x + y = 0$ |
| (g) $z = 0$ | (h) $x + y + z = 0$ | (i) $xyz = 1$ |

2. Señálese la torsión en $t = \pi/12$ a la curva de $\mathbb{R}^3$ con parametrización:

$$\vec{r}(t) = \left(t^2 \sqrt{t^2 + 1} \sin^2 t, t^2 \sqrt{t^2 + 1}, t^2 \sqrt{t^2 + 1} \cos^2 t \right), \quad t \in [0, 2\pi).$$

- | | | |
|------------------------|-------------|-------------------------------|
| (a) $1/5$ | (b) 0 | (c) $\sqrt{3}$ |
| (d) $\sqrt{\pi^2 + 1}$ | (e) $x + y$ | (f) $1/2$ |
| (g) $3/7$ | (h) 1 | (i) ninguna de las anteriores |

3. Determinése el vector binormal en el punto P de coordenadas $(1, 0, 1)$ de la curva definida por las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 &= z, \\ x^3 - y^2 &= 2 - x - y. \end{aligned}$$

4. Se considera la curva C definida por las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 11, \quad z \geq 0, \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Determinar la curvatura de C en el punto P de coordenadas $(0, \sqrt{2}, 3)$.

- (b) Hallar la ecuación del plano osculador de C en el punto P de coordenadas $(0, \sqrt{2}, 3)$.

5. Determinése la curvatura de la curva $\vec{\alpha}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ en $t = 0$.

6. Señálense los puntos singulares de la curva $\vec{\alpha}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$:

- (a) 0 (b) $\pi/2$ (c) $-3\pi/2$
 (d) $-\pi$ (e) $\pi/3$ (f) π
 (g) -1 (h) 2π (i) $\pi/6$

7. Determine la ecuación cartesiana del plano osculador a la curva $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$ en $t = 1$.

8. Señálese la ecuación del plano osculador a la curva $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, e^t, \sin t)$ en el punto $(1, 1, 0)$.

- (a) $-x + y + z = 0$ (b) $y + z = 1$ (c) $x - y + z = 2$
 (d) $x - y + z = 0$ (e) $x + y - z = 2$ (f) $\pi - x + z = 0$

9. Señálese la curvatura de la curva $\vec{\alpha}(t) = \left(\frac{1 + \sin(t/2)}{\sqrt{2}}, \frac{1 + \sin(t/2)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(t/2)}{\sqrt{2}} \right)$ en $t = \sqrt{3}\pi$.

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{1 + \sin t}{\sqrt{2}}$
 (d) $\sin(\sqrt{2}\pi)$ (e) 0 (f) 1
 (g) 2 (h) 3 (i) $\frac{1}{2}$

10. Sea la curva con parametrización

$$\vec{\gamma}(t) = (t^3, t^2 + 1, t^2 - t).$$

Se pide:

(a) Determinar la ecuación cartesiana del plano osculador en el punto $P = (0, 1, 0)$.

(b) Determinar la curvatura de la curva en el punto $P = (0, 1, 0)$.

(c) Hallar las ecuaciones cartesianas de la circunferencia osculatriz en $P = (0, 1, 0)$.

(d) Una parametrización de la circunferencia osculatriz en $P = (0, 1, 0)$.

11. Se considera la curva C con parametrización

$$\vec{\sigma}(t) = (3 \cos(t), 4 + \sin(t), \cos(t) + 3), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Se pide:

- (a) Comprobar que C es la curva intersección de un cilindro con un plano.
- (b) Estudiar si $\vec{\sigma}$ es una representación paramétrica regular de la curva C .
- (c) Hallar los vectores del Triedro de Frenet de C en el punto P de coordenadas $(0, 5, 3)$.
- (d) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta binormal de C en el punto P de coordenadas $(0, 5, 3)$.
- (e) Hallar la torsión de C en un punto genérico de la curva.

- (f) ¿Es C una curva plana? En caso afirmativo, calcular la ecuación cartesiana del plano que la contiene.

12. Se considera la superficie formada por las rectas tangentes a la curva con parametrización

$$\vec{\gamma}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Se pide:

- (a) Hallar las ecuaciones paramétricas de dicha superficie.
- (b) Hallar la proyección de la hélice sobre el plano $z = 0$ en la dirección del vector tangente a cada punto de la curva.