

APELLIDOS.....

NOMBRE..... Exp.....

1. Determinése la curvatura de la curva C definida por las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$\begin{aligned} -x^2 + y^2 - z^2 &= 7, & y &\geq 0, \\ x^2 + z^2 &= 2. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Señálense los puntos singulares de la curva $\vec{\alpha}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ 0 & \text{(b)} \ \pi/2 & \text{(c)} \ -3\pi/2 \\ \text{(d)} \ -\pi & \text{(e)} \ \pi/3 & \text{(f)} \ \pi \\ \text{(g)} \ -1 & \text{(h)} \ 2\pi & \text{(i)} \ \pi/6 \end{array}$$

3. Se considera la curva C con parametrización

$$\vec{\sigma}(t) = (3 \cos(t), 4 + \sin(t), \cos(t) + 3), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Se pide:

- (a) Comprobar que C es la curva intersección de un cilindro con un plano.

Ecuación cartesiana del cilindro:

$$(y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 1$$

Ecuación cartesiana del plano:

$$\frac{x}{3} = z - 3$$

NOTA: Esta pregunta tiene varias respuestas válidas. He escrito una de las posibles respuestas.

- (b) Vectores del Triedro de Frenet de C en el punto P de coordenadas $(0, 5, 3)$.

Vector tangente unitario:

$$\vec{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 0, -1)$$

Vector normal:

$$\vec{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1, 0)$$

Vector binormal:

$$\vec{b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 0, 3)$$

- (c) Ecuaciones paramétricas de la recta binormal de C en el punto P de coordenadas $(0, 5, 3)$.

$$\begin{cases} x(\lambda) = -\lambda \\ y(\lambda) = 5 \\ z(\lambda) = 3 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- (d) Torsión de C en un punto genérico de la curva.

$$\tau(t) = 0 \quad \forall t$$

- (e) ¿Es C una curva plana? En caso afirmativo, calcular la ecuación cartesiana del plano que la contiene.

$$\text{Sí.} \quad \frac{x}{3} = z - 3$$

4. Se considera la superficie formada por las rectas tangentes a la curva con parametrización

$$\vec{\gamma}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Se pide:

- (a) Hallar las ecuaciones paramétricas de dicha superficie.

$$(x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda)) = \vec{\gamma}(t) + \lambda \vec{\gamma}'(t), \quad t \in [0, 2\pi), \lambda \in \mathbb{R},$$

esto es,

$$\begin{aligned} (x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda)) &= (4 \cos t, 4 \sin t, 3t) + \lambda (-4 \sin t, 4 \cos t, 3) \\ &= (4 \cos t - 4\lambda \sin t, 4 \sin t + 4\lambda \cos t, 3t + 3\lambda). \end{aligned}$$

- (b) Hallar la proyección de la curva con parametrización $\vec{\gamma}(t)$ sobre el plano $z = 0$ en la dirección del vector tangente a cada punto de la curva.

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(t) &= (x(t, -t), y(t, -t), z(t, -t)) \\ &= (4 \cos t, 4 \sin t, 3t) - t (-4 \sin t, 4 \cos t, 3) \\ &= (4 \cos t + 4t \sin t, 4 \sin t - 4t \cos t, 0). \end{aligned}$$