

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (2 puntos) Para una curva regular en el espacio, partiendo de su representación natural, deducir la expresión de la curvatura de flexión y del vector binormal en un punto genérico cuando la curva esté referida a un parámetro cualquiera.

Solución. Sea C una curva con representación natural $\vec{\alpha}: J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y una representación paramétrica regular arbitraria $\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Con la representación paramétrica natural, el vector binormal se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s) = \frac{\vec{\alpha}'(s) \wedge \vec{\alpha}''(s)}{\|\vec{\alpha}''(s)\|}, \quad s \in J,$$

siendo

$$\vec{t}(s) = \vec{\alpha}'(s), \quad \vec{n}(s) = \frac{\vec{\alpha}''(s)}{\|\vec{\alpha}''(s)\|}.$$

Y la curvatura de flexión se obtiene por la fórmula:

$$\kappa(s) = \vec{\alpha}''(s) \cdot \vec{n}(s) = \|\vec{\alpha}''(s)\|.$$

Veamos cuáles son las expresiones del vector binormal y de la curvatura de flexión cuando tenemos una representación paramétrica arbitraria $\vec{r}(t)$ de la curva. Se tiene: $\vec{r}(t) = \vec{\alpha}(s(t))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{\alpha}'(s(t))s'(t) \\ &= \vec{\alpha}'(s(t)) \|\vec{r}'(t)\| \\ &= \vec{t}(t) \|\vec{r}'(t)\|, \\ \vec{r}''(t) &= \vec{\alpha}''(s(t))s'(t)^2 + \vec{\alpha}'(s(t))s''(t), \\ \vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) &= \vec{\alpha}'(s(t))s'(t) \wedge (\vec{\alpha}''(s(t))s'(t)^2 + \vec{\alpha}'(s(t))s''(t)) \\ &= s'(t)^3 \vec{\alpha}'(s(t)) \wedge \vec{\alpha}''(s(t)) \\ &= s'(t)^3 \kappa(s(t)) \vec{t}(t) \wedge \vec{n}(t) \\ &= \|\vec{r}'(t)\|^3 \kappa(s(t)) \vec{b}(t). \end{aligned}$$

Como $\vec{b}(t)$ es un vector unitario en la dirección del vector $\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)$ se tiene:

$$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad:

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|^3 \kappa(s(t)) \vec{b}(t),$$

se obtiene:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

2. (2 puntos) Se considera la curva C parametrizada por

$$\vec{\sigma}(t) = (2t \cos t, 2t \sin t, t + 1), \quad t \in (-2\pi, 2\pi).$$

Se pide:

- (a) ¿Es la curva dada una hélice de eje $\vec{w} = (1, 0, 1)$? Justifica la respuesta.

Solución. Para estudiar si dicha curva es una hélice cuyo eje tiene la dirección del vector $\vec{w} = (1, 0, 1)$ veamos si el vector tangente forma un ángulo constante con dicho vector. Tenemos:

$$\vec{\sigma}'(t) = (2 \cos t - 2t \sin t, 2 \sin t + 2t \cos t, 1),$$

y

$$\begin{aligned} \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 &= (2 \cos t - 2t \sin t)^2 + (2 \sin t + 2t \cos t)^2 + 1 \\ &= 4 \cos^2 t - 4t \sin t \cos t + 4t^2 \sin^2 t + 4 \sin^2 t + 4t \sin t \cos t + 4t^2 \cos^2 t + 1 \\ &= 4 (\cos^2 t + \sin^2 t) + 4t^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + 1 \\ &= 5 + 4t^2, \end{aligned}$$

luego la parametrización que tenemos no es la natural y

$$\vec{t}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5 + 4t^2}} (2 \cos t - 2t \sin t, 2 \sin t + 2t \cos t, 1)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{t}'(t) \cdot \vec{w} &= \frac{1}{\sqrt{5 + 4t^2}} (2 \cos t - 2t \sin t, 2 \sin t + 2t \cos t, 1) \cdot (1, 0, 1) \\ &= \frac{2 \cos t - 2t \sin t + 1}{\sqrt{5 + 4t^2}} \end{aligned}$$

que no es constante. Por tanto, la curva dada no es una hélice.

- (b) Hallar el centro y el radio de la circunferencia osculatriz a la curva en el punto $P = (0, 0, 1)$.

Solución. El punto $P = (0, 0, 1)$ se obtiene para el valor del parámetro $t = 0$ (esto es, $\vec{\sigma}(0) = (0, 0, 1)$). El centro de la circunferencia osculatriz se encuentra sobre la recta normal principal en la dirección del vector $\vec{n}(0)$ y a una distancia $R(0) = 1/\kappa(0)$ (esto es, el radio de la circunferencia osculatriz es $R(0) = 1/\kappa(0)$) Tenemos:

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0)\|}{\|\vec{\sigma}'(0)\|^3}.$$

Evaluando en $t = 0$ las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}'(t) &= (2 \cos t - 2t \sin t, 2 \sin t + 2t \cos t, 1) \\ \vec{\sigma}''(t) &= (-4 \sin t - 2t \cos t, 4 \cos t - 2t \sin t, 0), \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}'(0) &= (2, 0, 1), \\ \vec{\sigma}''(0) &= (0, 4, 0).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 0, 8), \\ \|\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0)\| &= \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},\end{aligned}$$

y

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0)\|}{\|\vec{\sigma}'(0)\|^3} = \frac{4\sqrt{5}}{5^{3/2}} = \frac{4}{5}.$$

Por tanto, el radio de la circunferencia oscultriz es:

$$R(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{5}{4}.$$

El centro Z de la circunferencia oscultriz en el punto $P = \vec{\sigma}(0)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + R(0)\vec{n}(0).$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{t}(0) &= \frac{\vec{\sigma}'(0)}{\|\vec{\sigma}'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1) \\ \vec{b}(0) &= \frac{\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0)}{\|\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0)\|} = \frac{1}{4\sqrt{5}}(-4, 0, 8)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\vec{n}(0) &= \vec{b}(0) \wedge \vec{t}(0) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} (0, 20, 0) = (0, 1, 0),\end{aligned}$$

y las coordenadas del centro de la circunferencia oscultriz son:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (0, 0, 1) + \frac{5}{4}(0, 1, 0) \\ &= (0, \frac{5}{4}, 1).\end{aligned}$$

3. (3 puntos) Sea S la superficie de rotación obtenida al girar la curva de ecuaciones cartesianas: $y = \cosh z$, $x = 0$, alrededor del eje OZ con $0 \leq z \leq 1$. Se pide:

(a) Hallar el área de S .

Solución. Hallamos primero la parametrización de dicha superficie. Una parametrización de la curva dada es:

$$\vec{\sigma}(t) = (0, \operatorname{ch} u, u), \quad 0 \leq u \leq 1.$$

La matriz de giro de ángulo α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, alrededor del eje OZ es:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{ch} u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \sin \alpha \\ \operatorname{ch} u \cos \alpha \\ u \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una parametrización de dicha superficie es:

$$\vec{r}(u, \alpha) = (\operatorname{ch} u \sin \alpha, \operatorname{ch} u \cos \alpha, u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

El área de S se puede calcular como sigue:

$$A = \int \int_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du d\alpha$$

donde $\Sigma = \{(u, \alpha) \mid 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$ y E, G, F son los coeficientes de la matriz de la primera forma fundamental de la superficie. Se verifica:

$$\sqrt{EG - F^2} = \|\vec{r}_u(u, \alpha) \wedge \vec{r}_\alpha(u, \alpha)\|.$$

Teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, \alpha) &= (\sinh u \sin \alpha, \sinh u \cos \alpha, 1), \\ \vec{r}_\alpha(u, \alpha) &= (\operatorname{ch} u \cos \alpha, -\operatorname{ch} u \sin \alpha, 0), \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\vec{r}_u(u, \alpha) \wedge \vec{r}_\alpha(u, \alpha) = (\operatorname{ch} u \sin \alpha, \operatorname{ch} u \cos \alpha, -\operatorname{ch} u \sinh u)$$

luego,

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_u(u, \alpha) \wedge \vec{r}_\alpha(u, \alpha)\| &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 u + \operatorname{ch}^2 u \sinh^2 u} \\ &= \operatorname{ch} u \sqrt{1 + \sinh^2 u} \\ &= \operatorname{ch}^2 u, \end{aligned}$$

pues se tiene la identidad: $\operatorname{ch}^2 u - \sinh^2 u = 1$. Luego, teniendo en cuenta:

$$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \operatorname{ch}^2 u du \right) d\alpha \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u}}{4} \right) du \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2u} + 2u - \frac{1}{2} e^{-2u} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 + 2 - \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e^0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^{-2} + 2 \right). \end{aligned}$$

- (b) Calcular la curvatura total y la curvatura media en un punto genérico. ¿Qué propiedad tiene S en relación con las curvaturas calculadas?

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 E(u, \alpha) &= \vec{r}_u(u, \alpha) \cdot \vec{r}_u(u, \alpha) \\
 &= (\sinh u \sin \alpha, \sinh u \cos \alpha, 1) \cdot (\sinh u \sin \alpha, \sinh u \cos \alpha, 1) \\
 &= \sinh^2 u + 1, \\
 F(u, \alpha) &= \vec{r}_u(u, \alpha) \cdot \vec{r}_\alpha(u, \alpha) \\
 &= (\sinh u \sin \alpha, \sinh u \cos \alpha, 1) \cdot (\operatorname{ch} u \cos \alpha, -\operatorname{ch} u \sin \alpha, 0) \\
 &= 0, \\
 G(u, \alpha) &= \vec{r}_\alpha(u, \alpha) \cdot \vec{r}_\alpha(u, \alpha) \\
 &= (\operatorname{ch} u \cos \alpha, -\operatorname{ch} u \sin \alpha, 0) \cdot (\operatorname{ch} u \cos \alpha, -\operatorname{ch} u \sin \alpha, 0) \\
 &= \operatorname{ch}^2 u.
 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{uu}(u, \alpha) &= (\operatorname{ch} u \sin \alpha, \operatorname{ch} u \cos \alpha, 0), \\
 \vec{r}_{u\alpha}(u, \alpha) &= (\sinh u \cos \alpha, -\sinh u \sin \alpha, 0) \\
 \vec{r}_{\alpha\alpha}(u, \alpha) &= (-\operatorname{ch} u \sin \alpha, -\operatorname{ch} u \cos \alpha, 0), \\
 \vec{N}(u, \alpha) &= \frac{\vec{r}_u(u, \alpha) \wedge \vec{r}_\alpha(u, \alpha)}{\|\vec{r}_u(u, \alpha) \wedge \vec{r}_\alpha(u, \alpha)\|} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} (\operatorname{ch} u \sin \alpha, \operatorname{ch} u \cos \alpha, -\operatorname{ch} u \sinh u) \\
 &= \left(\frac{1}{\operatorname{ch} u} \sin \alpha, \frac{1}{\operatorname{ch} u} \cos \alpha, -\frac{1}{\operatorname{ch} u} \sinh u \right)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 L(u, \alpha) &= \vec{r}_{uu}(u, \alpha) \cdot \vec{N}(u, \alpha) \\
 &= (\operatorname{ch} u \sin \alpha, \operatorname{ch} u \cos \alpha, 0) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{ch} u} \sin \alpha, \frac{1}{\operatorname{ch} u} \cos \alpha, -\frac{1}{\operatorname{ch} u} \sinh u \right) \\
 &= (\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \cdot (\sin \alpha, \cos \alpha, -\sinh u) \\
 &= 1, \\
 M(u, \alpha) &= \vec{r}_{u\alpha}(u, \alpha) \cdot \vec{N}(u, \alpha) \\
 &= \sinh u (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} u} (\sin \alpha, \cos \alpha, -\sinh u) \\
 &= 0, \\
 N(u, \alpha) &= \vec{r}_{\alpha\alpha}(u, \alpha) \cdot \vec{N}(u, \alpha) \\
 &= (-\operatorname{ch} u \sin \alpha, -\operatorname{ch} u \cos \alpha, 0) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} u} (\sin \alpha, \cos \alpha, -\sinh u) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Por tanto, la curvatura total es:

$$K_T(u, \alpha) = \frac{L(u, \alpha)N(u, \alpha) - M^2(u, \alpha)}{E(u, \alpha)G(u, \alpha) - F^2(u, \alpha)} = \frac{-1}{\operatorname{ch}^2 u} < 0$$

por tanto, todos los puntos de la superficie son hiperbólicos. Y la curvatura media es:

$$K_m(u, \alpha) = \frac{1}{2} \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{1 - \sinh^2 u - 1 + \operatorname{ch}^2 u}{2 \operatorname{ch}^2 u} = 0.$$

Por tanto, S es una superficie mínima.

- (c) Determinar las direcciones asintóticas en un punto genérico.

Solución. La curva C es una línea de curvatura si las coordenadas $(u'(t), v'(t))$ del vector $\vec{\gamma}'(t)$ en la base $\{\vec{r}_u(u(t), v(t)), \vec{r}_v(u(t), v(t))\}$ de $T_P S$ son solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = L(u'(t))^2 + 2Mu'(t)v'(t) + N(v'(t))^2.$$

Por tanto, una dirección (h, k) es asintótica si satisface la siguiente ecuación:

$$0 = h^2 - k^2.$$

Por tanto, $(1, 1)$ y $(1, -1)$ son las direcciones asintóticas en un punto genérico.

4. (3 puntos) Sea considera la superficie reglada engendrada por las rectas paralelas al plano $x + y = 2$ que se apoyan en las siguientes curvas:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y, z) \mid z = x^2, y = 0\}, \\ C_2 &= \{(x, y, z) \mid z = -y^2, x = 0\}. \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Obtener una parametrización de dicha superficie.

Solución. Damos primero parametrizaciones de ambas curvas. Una parametrización de C_1 es:

$$\vec{\sigma}(u) = (u, 0, u^2).$$

Y una parametrización de C_2 es:

$$\vec{\gamma}(v) = (0, v, -v^2).$$

La familia de rectas que unen puntos de ambas curvas viene dada por:

$$\vec{\sigma}(u) - \vec{\gamma}(v) = (u, -v, u^2 + v^2).$$

Seleccionamos aquellas paralelas al plano de ecuación $x + y = 2$, por tanto, aquellas con dirección ortogonal al vector $(1, 1, 0)$:

$$0 = (u, -v, u^2 + v^2) \cdot (1, 1, 0) = u - v.$$

Por tanto, $u = v$. Por tanto, la superficie está formada por la familia de rectas:

$$(u, -u, 2u^2) = u(1, -1, 2u)$$

Una parametrización de la superficie es:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, t) &= \vec{\sigma}(u) + t(1, -1, 2u) \\ &= (u, 0, u^2) + t(1, -1, 2u) \\ &= (u + t, -t, u^2 + 2tu). \end{aligned}$$

- (b) Estudiar si es alabeada o desarrollable. Clasificar los puntos de dicha superficie.

Solución. Consideramos la parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, t) &= \vec{\sigma}(u) + t\vec{w}(u) \\ &= (u, 0, u^2) + t(1, -1, 2u) \\ &= (u + t, -t, u^2 + 2tu). \end{aligned}$$

La curvatura total de dicha superficie viene dada por:

$$K_T(u, t) = -\frac{[\vec{\sigma}'(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)]^2}{\|\vec{r}_u(u, t) \wedge \vec{r}_t(u, t)\|^4},$$

donde

$$[\vec{\sigma}'(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 1 & -1 & 2u \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

luego la superficie es alabeada y todos los puntos de la superficie son hiperbólicos.

- (c) Obtener un cambio admisible de parámetros que transforme la representación paramétrica obtenida en la siguiente:

$$\vec{r}(t, s) = (t - s, t + s, -4ts)$$

y obtener una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie dada.

Solución. Cambiamos la letra utilizada en los parámetros de nuestra parametrización. Tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(u) + v\vec{w}(u) &= (u, 0, u^2) + v(1, -1, 2u) \\ &= (u + v, -v, u^2 + 2vu).\end{aligned}$$

Y busquemos una parametrización:

$$\vec{r}(t, s) = (t - s, t + s, -4ts)$$

por tanto, se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} u + v = t - s \\ -v = t + s \\ u^2 + 2vu = -4ts \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos: $t = u/2$, $s = -v - t = -v - u/2$. Sustituyéndolo en la tercera ecuación se comprueba que dicha ecuación se satisface.

Teniendo en cuenta:

$$\begin{cases} x = t - s \\ y = t + s \\ z = -4ts \end{cases}$$

se tiene: $x^2 - y^2 = z$ que es una ecuación en coordenadas cartesianas de dicha superficie.