

APELLIDOS.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (4 puntos) Se considera la curva C con parametrización

$$\vec{\sigma}(t) = \left(t^2 - 9, \frac{t^3}{3}, 2t \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

y sean los puntos de la curva $P = (-9, 0, 0)$ y $Q = (0, 9, 6)$. Se pide calcular:

- El parámetro arco de la curva.
- La longitud de la curva entre los puntos P y Q .
- El triedro de Frenet en el punto P .
- La curvatura y la torsión de la curva en el punto P .
- Ecuaciones cartesianas y paramétricas de la circunferencia oscultriz en P .
- Intersección de la superficie formada por las rectas tangentes a la curva con el plano normal a la superficie en el punto P .

Solución.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}'(t) &= (2t, t^2, 2), \\ \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 &= 4t^2 + t^4 + 4 = (t^2 + 2)^2. \end{aligned}$$

El parámetro arco de la curva es:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\sigma}'(u)\| du = \int_0^t (u^2 + 2) du = \frac{t^3}{3} + 2t$$

La longitud de la curva entre los puntos $P = \vec{\sigma}(0)$ y $Q = \vec{\sigma}(3)$ es:

$$\int_0^3 \|\vec{\sigma}'(u)\| du = \int_0^3 (u^2 + 2) du = 15.$$

Los elementos del triedro de Frenet en el punto $P = \vec{\sigma}(0)$ son:

$$\begin{aligned} \vec{t}(0) &= \frac{\vec{\sigma}'(0)}{\|\vec{\sigma}'(0)\|} = (0, 0, 1), \\ \vec{\sigma}'(0) \times \vec{\sigma}''(0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 4, 0), \\ \vec{b}(0) &= (0, 1, 0), \\ \vec{n}(0) &= \vec{b}(0) \times \vec{t}(0) = (1, 0, 0). \end{aligned}$$

La curvatura y la torsión de la curva en el punto $P = \vec{\sigma}(0)$ son:

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{\|\vec{\sigma}'(0) \times \vec{\sigma}''(0)\|}{\|\vec{\sigma}'(0)\|^3} = \frac{1}{2}, \\ \tau(0) &= \frac{[\vec{\sigma}'(0), \vec{\sigma}''(0), \vec{\sigma}'''(0)]}{\|\vec{\sigma}'(0) \times \vec{\sigma}''(0)\|^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

El radio de curvatura en P y el centro de la circunferencia oscultriz en P son:

$$\begin{aligned} R(0) &= 2, \\ \overrightarrow{OZ} &= \overrightarrow{OP} + R(0)\vec{n}(0) = (-9, 0, 0) + 2(1, 0, 0) \\ &= (-7, 0, 0). \end{aligned}$$

La ecuación cartesiana del plano osculador es:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{b}(0) = 0 \iff (x+9, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0 \iff y = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones cartesianas de la circunferencia osculatriz son:

$$\begin{cases} y = 0, \\ (x+7)^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

La superficie formada por las rectas tangentes a la curva en cada puntos tiene parametrización:

$$\vec{r}(t, \lambda) = \vec{\sigma}(t) + \lambda \vec{\sigma}'(t) = \left(t^2 - 9, \frac{t^3}{3}, 2t \right) + \lambda (2t, t^2, 2).$$

Intersecando con el plano normal que tiene ecuación: $z = 0$ obtenemos: $\lambda = -t$. Por tanto, la proyección pedida es:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t, -t) &= \vec{\sigma}(t) - t \vec{\sigma}'(t) = \left(t^2 - 9, \frac{t^3}{3}, 2t \right) - t (2t, t^2, 2) \\ &= \left(-t^2 - 9, -\frac{2t^3}{3}, 0 \right). \end{aligned}$$

2. (4 puntos) Sea la superficie S con parametrización

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2), \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Se pide:

- Comprobar que la superficie es el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$.
- Calcular la primera forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario de la superficie.
- Calcular la segunda forma fundamental de la superficie en el punto $P = (1, 0, 1)$ y clasificar el punto P .
- Hallar las direcciones principales y las curvaturas principales en P .
- ¿Hay direcciones asintóticas en el punto P ? Razona la respuesta.
- Hallar el área de la superficie.

Solución.

Se tiene:

$$x^2 + y^2 = u^2 \cos^2(v) + u^2 \sin^2(v) = u^2 = z.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u, v) &= (\cos(v), \sin(v), 2u), \\ \vec{r}_v(u, v) &= (-u \sin(v), u \cos(v), 0), \\ \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_u(u, v) &= 1 + 4u^2, \\ \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) &= 0 \\ \vec{r}_v(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) &= u^2.\end{aligned}$$

La primera forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario de la superficie es:

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $P = \vec{r}(1, 0)$ y por tanto:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(1, 0) \times \vec{r}_v(1, 0) &= (-2, 0, 1), \\ \vec{N}(1, 0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 0, 1), \\ \vec{r}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 2), \\ \vec{r}_{uv}(u, v) &= (-\sin(v), \cos(v), 0) \\ \vec{r}_{vv}(u, v) &= (-u \cos(v), -u \sin(v), 0), \\ \vec{r}_{uu}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) &= \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \vec{r}_{uv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) &= 0, \\ \vec{r}_{vv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) &= \frac{2}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

La segunda forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario de la superficie es:

$$II(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Las direcciones principales en P son: $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Las curvaturas principales en P son: $\kappa_1 = \frac{2}{25}\sqrt{5}$ y $\kappa_2 = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Como el punto P es elíptico pues sus dos curvaturas principales son positivas, el plano tangente a la superficie en P no tiene direcciones asintóticas.

El área de la superficie es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{v=0}^{2\pi} \int_{u=0}^2 \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &= \int_{v=0}^{2\pi} \int_{u=0}^2 u \sqrt{1 + 4u^2} du dv \\ &= \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

3. (2 puntos) Se considera la superficie formada por segmentos que unen el punto $P = (1, 0, 0)$ con los puntos de la curva C de ecuaciones $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ y $z = 3$.

Se pide:

- Hacer un esbozo de la superficie y determinar unas ecuaciones paramétricas de dicha superficie.
- ¿Es una superficie alabeada o desarrollable? Justificar la respuesta.
- ¿Tiene la superficie puntos singulares? Calcularlos en caso afirmativo.
- Parametrizar la generatriz que contiene al punto $Q = (2, 1, 3)$.

Solución.

Una parametrización de la curva C es:

$$\vec{\sigma}(u) = (2 + \cos(u), \sin(u), 3), \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Unas ecuaciones paramétricas de dicha superficie son:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\sigma}(u) + v\vec{w}(u), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

con

$$\vec{w}(u) = \vec{\sigma}(u) - \overrightarrow{OP} = (1 + \cos(u), \sin(u), 3).$$

La superficie es de tipo cono y por tanto es una superficie desarrollable.

El único punto singular es el punto P (vértice del cono).

Teniendo en cuenta que $Q = \vec{\sigma}(\frac{\pi}{2})$ la generatriz que lo contiene es:

$$\begin{aligned} \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &= \vec{\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) + v\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (2, 1, 3) + v(1, 1, 3) \\ &= (2 + v, 1 + v, 3 + 3v), \quad 0 \leq v \leq 1. \end{aligned}$$