

APELLIDOS.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (4 puntos) Se considera la curva C con parametrización

$$\vec{r}(t) = (t^3, t^2 + 1, t^2 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

- (a) El triedro de Frenet en el punto P .
- (b) Determinar la ecuación cartesiana del plano osculador en el punto $P = (0, 1, 0)$.
- (c) Determinar la curvatura de la curva en el punto $P = (0, 1, 0)$.
- (d) Una parametrización de la circunferencia osculatriz en $P = (0, 1, 0)$.

Solución. Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= (3t^2, 2t, 2t - 1) \\ \vec{r}''(t) &= (6t, 2, 2) \\ \vec{r}'''(t) &= (6, 0, 0)\end{aligned}$$

luego como $P = \vec{r}(0)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(0) &= (0, 0, -1), \\ \vec{r}''(0) &= (0, 2, 2), \\ \vec{r}'''(0) &= (6, 0, 0), \\ \vec{r}'(0) \wedge \vec{r}''(0) &= (2, 0, 0),\end{aligned}$$

y

$$\vec{t}(0) = (0, 0, -1), \quad \vec{b}(0) = (1, 0, 0), \quad \vec{n}(0) = (0, 1, 0).$$

La ecuación cartesiana del plano osculador es

$$(x, y - 1, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \implies x = 0.$$

Curvatura en P :

$$\kappa(0) = 2.$$

Circunferencia osculatriz en P :

$$\begin{aligned}OZ &= OP + \frac{1}{2}\vec{n}(0) = \left(0, \frac{3}{2}, 0\right) \\ (x, y, z) &= OZ + \frac{1}{2}\cos(t)\vec{t}(0) + \frac{1}{2}\sin(t)\vec{n}(0) \\ &= \left(0, \frac{3}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}\cos(t)(0, 0, -1) + \frac{1}{2}\sin(t)(0, 1, 0) \\ &= \left(0, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sin(t), -\frac{1}{2}\cos(t)\right).\end{aligned}$$

2. (5 puntos) Se considera la curva C con parametrización

$$\vec{r}(t) = (3\cos t, 1 + 4t, 3\sin t), \quad t \in [0, 4\pi).$$

Se pide:

- (a) Hallar las funciones torsión y curvatura de C un punto arbitrario de C .
- (b) Estudiar si la curva C es una hélice. En tal caso, hallar la tangente del ángulo que forman los vectores tangentes a la curva con el vector del eje de la hélice.
- (c) Hallar unas ecuaciones paramétricas de la superficie formada por las rectas tangentes a C .

- (d) Hallar la curva intersección de la superficie anterior con el plano de ecuación $y = 0$.

Solución. Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= (-3 \sin t, 4, 3 \cos t), \\ \vec{r}''(t) &= (-3 \cos t, 0, -3 \sin t), \\ \vec{r}'''(t) &= (3 \sin t, 0, -3 \cos t), \\ \vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) &= (-12 \sin t, 9, 12 \cos t)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{12^2 + 9^2}}{\sqrt{(9 + 16)^3}} = \frac{\sqrt{9(4^2 + 3^2)}}{25\sqrt{25}} = \frac{3}{25}, \\ \tau(t) &= \frac{[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)]}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|^2} = -\frac{12 \cdot 3}{12^2 + 9^2} = -\frac{12 \cdot 3}{9(4^2 + 3^2)} = -\frac{4}{25}.\end{aligned}$$

Por tanto, C es una hélice. Las tangentes a C forman un ángulo α con

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{25}}{-\frac{4}{25}} = -\frac{3}{4}$$

Las ecuaciones paramétricas de la superficie formada por las rectas tangentes a C son:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, u) &= \vec{r}(t) + u\vec{r}'(t) \\ &= (3 \cos t, 1 + 4t, 3 \sin t) + u(-3 \sin t, 4, 3 \cos t) \\ &= (3 \cos t - 3u \sin t, 1 + 4t + 4u, 3 \sin t + u \cos t).\end{aligned}$$

La curva intersección con el plano $y = 0$ se alcanza cuando:

$$u = -\frac{1}{4} - t$$

esto es,

$$\vec{r}(t, -\frac{1}{4} - t) = (3 \cos t + 3(\frac{1}{4} + t) \sin t, 0, 3 \sin t - (\frac{1}{4} + t) \cos t).$$

3. (1 punto) Determinése el vector binormal en el punto P de coordenadas $(1, 0, 1)$ de la curva definida por las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$\begin{aligned}x^3 - y^2 &= z, \\ x^3 - y^2 &= 2 - x - y.\end{aligned}$$

Solución. La curva está contenida en el plano $z = 2 - x - y$. El vector normal a la curva en C es:

$$\vec{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

NOTA: Recuerdese las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\vec{t}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}, & \vec{b}(t) &= \frac{\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}, \\ \kappa(t) &= \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}, & \tau(t) &= \frac{[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)]}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|^2}.\end{aligned}$$