

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (4 puntos) Se considera la curva C con parametrización

$$\vec{\sigma}(t) = \left(t^2 - 9, \frac{t^3}{3}, 2t \right), \quad t > 0,$$

y sean los puntos de la curva $P = (-9, 0, 0)$ y $Q = (0, 9, 6)$. Se pide calcular:

- (a) El parámetro arco de la curva.
- (b) La longitud de la curva entre los puntos P y Q .
- (c) El triedro de Frenet en el punto P .
- (d) Ecuaciones paramétricas de la circunferencia centrada en P , de radio $r = 2$ y contenida en el plano normal a la curva en P .
- (e) Hallar la curva intersección de la superficie formada por las rectas tangentes a la curva con el plano normal a la curva en el punto P .
- (f) Hacer un esbozo de la superficie del apartado anterior.

Solución. Se tiene: $\vec{\sigma}'(t) = (2t, t^2, 2)$. El parámetro arco es:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \|\vec{\sigma}'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{4u^2 + u^4 + 4} du \\ &= \int_0^t \sqrt{(u^2 + 2)^2} du \\ &= \int_0^t (u^2 + 2) du = \left(\frac{u^3}{3} + 2u \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{t^3}{3} + 2t. \end{aligned}$$

La longitud de la curva entre los puntos $P = \vec{\sigma}(0)$ y $Q = \vec{\sigma}(3)$ es:

$$\begin{aligned} L_{PQ} &= \int_0^3 \|\vec{\sigma}'(u)\| du = \int_0^3 \sqrt{(u^2 + 2)^2} du \\ &= \int_0^3 (u^2 + 2) du = \left(\frac{u^3}{3} + 2u \right) \Big|_0^3 = 9 + 6 = 15. \end{aligned}$$

Se tiene: $\vec{\sigma}''(t) = (2, 2t, 0)$. En P , tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}'(0) &= (0, 0, 2) \\ \vec{\sigma}''(0) &= (2, 0, 0), \\ \vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 4, 0). \end{aligned}$$

Triedro de Frenet en P :

$$\vec{t}(0) = \frac{\vec{\sigma}'(0)}{\|\vec{\sigma}'(0)\|} = (0, 0, 1), \quad \vec{b}(0) = \frac{\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0)}{\|\vec{\sigma}'(0) \wedge \vec{\sigma}''(0)\|} = (0, 1, 0), \quad \vec{n}(0) = (1, 0, 0).$$

Ecuaciones paramétricas de la circunferencia centrada en P , de radio 2 y contenida en el plano normal.

$$\begin{aligned} \vec{r}(\alpha) &= \vec{\sigma}(0) + 2 \left(\cos \alpha \vec{b}(0) + \sin \alpha \vec{n}(0) \right) \\ &= (-9, 0, 0) + 2 (\cos \alpha (0, 1, 0) + \sin \alpha (1, 0, 0)) \\ &= (-9 + 2 \sin \alpha, 2 \cos \alpha, 0). \end{aligned}$$

Superficie formada por las rectas tangentes a la curva:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t, \lambda) &= \vec{\sigma}(t) + \lambda \vec{\sigma}'(t) \\ &= \left(t^2 - 9, \frac{t^3}{3}, 2t \right) + \lambda (2t, t^2, 2) \\ &= \left(t^2 - 9 + 2\lambda t, \frac{t^3}{3} + \lambda t^2, 2t + 2\lambda \right). \end{aligned}$$

Ecuación cartesiana del plano normal a la curva en P :

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{t}(0) = 0 \iff (x + 9, y, z) \cdot (0, 0, 1) = 0 \iff z = 0.$$

Curva intersección de la superficie tangencial con el plano $z = 0$: $2t + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -t$.

$$\vec{r}(t, -t) = \left(-9 - t^2, -2\frac{t^3}{3}, 0 \right).$$

2. (4 puntos) Se considera la curva con parametrización

$$\vec{\sigma}(t) = (3 \cos t, 1 + 4t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 4\pi).$$

Se pide:

- (a) Hallar las funciones torsión y curvatura.
- (b) Estudiar si la curva C es una hélice. En tal caso, hallar el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva con el vector del eje de la hélice.

Solución. Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}'(t) &= (-3 \sin t, 4, 3 \cos t), \\ \vec{\sigma}''(t) &= (-3 \cos t, 0, -3 \sin t), \\ \vec{\sigma}'''(t) &= (3 \sin t, 0, -3 \cos t).\end{aligned}$$

Curvatura y torsión:

$$\kappa(t) = \frac{3}{25}, \quad \tau(t) = -\frac{4}{25}.$$

Como $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)} = -\frac{3}{4}$ es constante sabemos por el Teorema de Lancret que la curva es una hélice. El ángulo que forman los vectores tangentes a la curva con el vector del eje de la hélice es:

$$\theta = \arctan \frac{\kappa(t)}{\tau(t)} = \arctan \left(-\frac{3}{4}\right).$$

3. (1 punto) Las ecuaciones intrínsecas de una curva regular vienen dadas por $\kappa(s) = 2$, $\tau(s) = 0$. Señálense las proposiciones ciertas:
- (a) El enunciado nunca se puede cumplir.
 - (b) Se trata de una circunferencia de radio 2.
 - (c) Se trata de una circunferencia de radio 1/2. CORRECTA.
 - (d) El triedro de Frenet es el mismo en todos los puntos de la curva.
 - (e) El vector binormal es constante. CORRECTA.
 - (f) Se trata de una hélice.