

APELLIDOS.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (5 puntos) Se considera la curva
- C
- con parametrización

$$\vec{\sigma}(t) = (te^t, e^t, t^2 + 1), \quad t \in (0, 2).$$

Se pide:

- (a) Vectores del Triedro de Frenet de C en el punto $P = (0, 1, 1)$.
- (b) Torsión de C en el punto P .
- (c) Curvatura de C en el punto P .
- (d) ¿Es C una curva plana?
- (e) Ecuaciones paramétricas de la circunferencia oscultriz en P .
- (f) Superficie formada por las rectas tangentes a la curva. Hacer un esbozo de la superficie.
- (g) Curva intersección de la superficie del apartado anterior con el plano de ecuación $z = 0$.

Solución.

Tenemos:

$$\begin{cases} \vec{\sigma}'(t) = (te^t + e^t, e^t, 2t), \\ \vec{\sigma}''(t) = (te^t + 2e^t, e^t, 2), \\ \vec{\sigma}'''(t) = (te^t + 3e^t, e^t, 0), \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \vec{t}(0) = \frac{\vec{\sigma}'(0)}{\|\vec{\sigma}'(0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\ \vec{b}(0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \\ \vec{n}(0) = \vec{b}(0) \times \vec{t}(0) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, 4), \end{cases}$$

son los elementos del triedro de Frenet en el punto $P = \vec{\sigma}(0)$.La curvatura y la torsión de la curva en el punto $P = \vec{\sigma}(0)$ son:

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{\sigma}'(0) \times \vec{\sigma}''(0)\|}{\|\vec{\sigma}'(0)\|^3} = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad \text{y} \quad \tau(0) = \frac{[\vec{\sigma}'(0), \vec{\sigma}''(0), \vec{\sigma}'''(0)]}{\|\vec{\sigma}'(0) \times \vec{\sigma}''(0)\|^2} = \frac{4}{9}.$$

La torsión no es idénticamente nula pues $\tau(0) = \frac{4}{9}$. Por tanto, la curva no es plana.El radio de curvatura en P y el centro de la circunferencia oscultriz en P son:

$$R(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\vec{OZ} = \vec{OP} + R(0)\vec{n}(0) = (0, 1, 1) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, 4) = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{17}{9}\right).$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia oscultriz son:

$$\begin{aligned} \vec{OX} &= \vec{OZ} + R(0) (\cos(t)\vec{t}(0) + \sin(t)\vec{n}(0)) \\ &= \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{17}{9}\right) + \cos(t) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + \sin(t) \left(\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right) \\ &= \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\cos(t) + \frac{2}{9}\sin(t), \frac{7}{9} + \frac{2}{3}\cos(t) - \frac{2}{9}\sin(t), \frac{17}{9} + \frac{8}{9}\sin(t)\right), \\ &t \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

La superficie formada por las rectas tangentes a la curva en cada puntos tiene parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t, \lambda) &= \vec{\sigma}(t) + \lambda \vec{\sigma}'(t) \\ &= (te^t, e^t, t^2 + 1) + \lambda (te^t + e^t, e^t, 2t) \\ &= (e^t(t + \lambda t + \lambda), e^t(1 + \lambda), t^2 + 1 + 2\lambda t). \end{aligned}$$

Intersección de la superficie con el plano que tiene ecuación: $z = 0$ obtenemos: $\lambda = -\frac{1}{2t}(1 + t^2)$.
 Por tanto, la curva pedida es:

$$\vec{r}\left(t, -\frac{1}{2t}(1 + t^2)\right) = \left(e^t\left(t - \frac{1}{2t}(1 + t^2)(t + 1)\right), e^t\left(1 - \frac{1}{2t}(1 + t^2)\right), 0\right).$$

2. (5 puntos) Sea la superficie S con parametrización

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, 2 - u^2 + v^2), \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2.$$

Se pide:

- (a) Primera forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario de la superficie.
- (b) Segunda forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario de la superficie.
- (c) Clasificar el punto $P = (0, 0, 2)$.
- (d) Hallar las direcciones principales y las curvaturas principales en P .
- (e) Hallar las direcciones asintóticas en P .

Solución.

Se tiene:

$$\begin{cases} \vec{r}_u(u, v) = (1, 0, -2u), \\ \vec{r}_v(u, v) = (0, 1, 2v), \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_u(u, v) = 1 + 4u^2, \\ \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = -4uv, \\ \vec{r}_v(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = 1 + 4v^2. \end{cases}$$

La matriz de la primera forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario de la superficie es:

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{cases} \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) = (2u, -2v, 1), \\ \vec{N}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} (2u, -2v, 1), \\ \vec{r}_{uu}(u, v) = (0, 0, -2), \\ \vec{r}_{uv}(u, v) = (0, 0, 0), \\ \vec{r}_{vv}(u, v) = (0, 0, 2), \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \\ \vec{r}_{uv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = 0, \\ \vec{r}_{vv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}. \end{cases}$$

La matriz de la segunda forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario de la superficie es:

$$II(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \end{pmatrix}.$$

Todos los puntos de la superficie son hiperbólicos pues $\det(II(u, v)) < 0$ para todo (u, v) .

En $P = \vec{r}(0, 0)$, la matriz de la aplicación de Weingarten es:

$$\begin{aligned} A &= -I(0, 0)^{-1} II(0, 0) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El punto P es un punto hiperbólico.

Las direcciones principales en P son: $(1, 0)$ y $(0, 1)$ (que se corresponden con las direcciones de las líneas coordenadas; esto es, $\vec{r}_u(0, 0)$ y $\vec{r}_v(0, 0)$).

Las curvaturas principales en P son: $\kappa_1 = -2$ y $\kappa_2 = 2$.

Como la curvatura normal en las direcciones asintóticas es cero, por el teorema de Euler se tiene que una dirección $\cos(\alpha)(1, 0) + \sin(\alpha)(0, 1)$ es asintótica si satisface:

$$\begin{aligned} 0 &= -2\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha = -2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= -2(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha), \end{aligned}$$

esto es, si $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$. Las direcciones asintóticas de S en P son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$