

APELLIDOS.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (5 puntos) Sea la superficie
- S
- con parametrización

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2), \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Se pide:

- (a) Hallar las líneas coordenadas en el punto $P = (1, 0, 1)$.
- (b) Hacer un esbozo de la superficie y de las líneas coordenadas en el punto $P = (1, 0, 1)$.
- (c) Calcular la matriz de primera forma fundamental de la superficie en un punto arbitrario.
- (d) Calcular la matriz de la segunda forma fundamental de la superficie en el punto $P = (1, 0, 1)$.
- (e) Clasificar el punto P .
- (f) Hallar las direcciones principales y las curvaturas principales en P .
- (g) ¿Hay direcciones asintóticas en el punto P ? Razona la respuesta.
- (h) Hallar el área de la superficie.

Solución.Las líneas coordenadas en $P = \vec{r}(1, 0)$ son:

$$\vec{r}(1, v) = (\cos(v), \sin(v), 1), \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

$$\vec{r}(u, 0) = (u, 0, u^2), \quad 0 \leq u \leq 2.$$

Matriz de la primera forma fundamental de S en un punto arbitrario:

$$\begin{cases} \vec{r}_u(u, v) = (\cos(v), \sin(v), 2u), \\ \vec{r}_v(u, v) = (-u \sin(v), u \cos(v), 0), \end{cases} \implies \begin{cases} E(u, v) = \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_u(u, v) = 1 + 4u^2, \\ F(u, v) = \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = 0, \\ G(u, v) = \vec{r}_v(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = u^2, \end{cases}$$

por tanto,

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Matriz de la segunda forma fundamental de S en P :

$$\vec{r}_u(1, 0) \wedge \vec{r}_v(1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1),$$

$$\vec{N}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1),$$

y

$$\begin{cases} \vec{r}_{uu}(u, v) = (0, 0, 2), \\ \vec{r}_{uv}(u, v) = (-\sin(v), \cos(v), 0), \\ \vec{r}_{vv}(u, v) = (-u \cos(v), -u \sin(v), 0), \end{cases} \implies \begin{cases} L(1, 0) = \vec{r}_{uu}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ M(1, 0) = \vec{r}_{uv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = 0, \\ N(1, 0) = \vec{r}_{vv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

por tanto,

$$II_P = II(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Como $\det II(1, 0) > 0$ el punto $P = \vec{r}(1, 0)$ es elíptico.La matriz de la aplicación de Weingarten en P es:

$$A_P = -I_P^{-1} II_P = - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{25}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Las curvaturas principales en P son $\kappa_1(1,0) = \frac{2}{25}\sqrt{5}$ y $\kappa_2(1,0) = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Las direcciones asintóticas son

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= (1,0) = 1 \cdot \vec{r}_u(1,0) + 0 \cdot \vec{r}_v(1,0) = \vec{r}_u(1,0), \\ \vec{w}_2 &= (0,1) = 0 \cdot \vec{r}_u(1,0) + 1 \cdot \vec{r}_v(1,0) = \vec{r}_v(1,0).\end{aligned}$$

En P no hay direcciones asintóticas porque las dos curvaturas principales tienen el mismo signo.

Área de la superficie:

$$\begin{aligned}& \int_{u=0}^2 \int_{v=0}^{2\pi} \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} dv du \\ &= \int_{u=0}^2 \int_{v=0}^{2\pi} \sqrt{u^2(1+4u^2)} dv du \\ &= 2\pi \int_{u=0}^2 \sqrt{u^2(1+4u^2)} du \\ &= \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

2. (3 puntos) Sabiendo que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de una superficie S en un punto P de la superficie son: $E = 2$, $F = 0$, $G = 1$ y $L = 2$, $M = 0$, $N = -1$. Se pide:

La matriz de la aplicación de Weingarten en P es:

$$A_P = -I_P^{-1}II_P = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinénse las curvaturas y las direcciones principales de S en P .

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 1, & \kappa_2 &= -1, \\ \vec{u}_1 &= (1,0), & \vec{u}_2 &= (0,1).\end{aligned}$$

- (b) Determinénse las direcciones asintóticas en el plano tangente de S en P . ¿Son ortogonales las direcciones asintóticas de S en P ? Justifíquese la respuesta.

$$\begin{aligned}0 &= \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha),\end{aligned}$$

luego las direcciones asintóticas se alcanzan para $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$; esto es,

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_2, \\ \vec{w}_2 &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_1 + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_2,\end{aligned}$$

siendo $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ las direcciones principales.

La curvatura de Gauss en P es

$$\text{a) } \underline{\kappa_G = -1} \quad \text{b) } \kappa_G = 2 \quad \text{c) } \kappa_G = 0 \quad \text{d) ninguna de las anteriores.}$$

- (c) El punto P es

$$\text{a) elíptico} \quad \text{b) } \underline{\text{hiperbólico}} \quad \text{c) parabólico} \quad \text{d) ninguna de las anteriores.}$$

- (d) El número de direcciones asintóticas en P es:

$$\text{a) uno} \quad \text{b) cero} \quad \text{c) } \underline{\text{dos}} \quad \text{d) ninguna de las anteriores.}$$

3. (2 puntos) Se considera la superficie formada por segmentos que se apoyan en la curva de ecuaciones cartesianas $z = 2 + \sin(x), y = 0, -2\pi \leq x \leq 2\pi$, y en el segmento de ecuaciones $y = 4, z = 2, -1 \leq x \leq 1$. Se pide:

- (a) Hacer un esbozo de la superficie y hallar unas ecuaciones paramétricas de dicha superficie.

Parametrización de la curva:

$$c_1(u) = (u, 0, 2 + \sin(u)), \quad -2\pi \leq u \leq 2\pi.$$

Parametrización del segmento:

$$c_2(u) = \left(\frac{u}{2\pi}, 4, 2\right), \quad -2\pi \leq u \leq 2\pi.$$

Parametrización de la superficie:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, v) &= c_1(u) + vw(u) \\ &= c_1(u) + v(c_2(u) - c_1(u)) \\ &= (u, 0, 2 + \sin(u)) + v\left(\frac{u}{2\pi} - u, 4, -\sin(u)\right), \quad -2\pi \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1. \end{aligned}$$

- (b) Hallar el parámetro de distribución y clasificar dicha superficie.

$$\begin{aligned} p(u) &= [c'_1(u), w(u), w'(u)] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos(u) \\ \frac{u}{2\pi} - u & 4 & -\sin(u) \\ \frac{1}{2\pi} - 1 & 0 & -\cos(u) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{2}{\pi} \cos u. \end{aligned}$$

La superficie es no desarrollable.