



Curvas y Superficies

Solución examen 6 de julio de 2017

1. a) Sea $\vec{c}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$. El punto $(1, 0, 0) = \vec{c}(0)$. El vector binormal es $\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 0, 1)$. La ecuación del plano osculador es $-(x-1) + z = 0$, es decir, $z - x = -1$.
- b) El radio de curvatura en $(1, 0, 0)$ $r = \frac{3\sqrt{6}}{4}$. El vector normal $\vec{n} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, 2, -1)$. El centro de curvatura $C = (1, 0, 0) + r \cdot \vec{n} = (1/4, 3/2, -3/4)$.
- c) El vector tangente en $(1, 0, 0)$ es $\vec{t} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$. La circunferencia osculatriz tiene ecuación

$$\vec{\gamma}(t) = C + r\vec{n} \cos t + r\vec{t} \sin t$$

La curva no está contenida en el plano osculador. No es una hélice. Además, se comprueba que

$$\vec{c}(t) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \neq \cos t$$

.

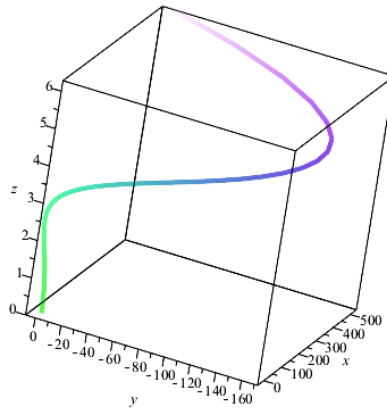


Figura 1: $\vec{c}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$

2. Sea $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 - \lambda v^2)$.

- a) El punto $P = (2, 0, 4) = \vec{r}(2, 0)$. Tenemos que $\vec{r}_u = (1, 0, 2u)$, $\vec{r}_v = (0, 1, -2\lambda v)$. El producto vectorial $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-4, 0, 1) \neq \vec{0}$.
- b) Las curvas coordenadas forman un ángulo de $\pi/2$ cuando son perpendiculares, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -4\lambda uv = 0$. Entonces $\lambda = 0$.
- c) El vector normal es

$$N(u, v) = \frac{(-2u, 2\lambda v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4\lambda^2 v^2 + 1}}$$

Las derivadas segundas son $\vec{r}_{uu} = (0, 0, 2)$, $\vec{r}_{uv} = (0, 0, 0)$, $\vec{r}_{vv} = (0, 0, -2\lambda)$. La segunda forma fundamental es

$$II_p = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4\lambda^2 v^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante de la segunda forma fundamental es $\det(II_p) = -4\lambda$. Tenemos tres casos:



1) Si $\lambda = 0$ tenemos puntos parabólicos;

2) Si $\lambda < 0$ tenemos puntos elípticos;

3) Si $\lambda > 0$ tenemos puntos hiperbólicos.

d) Para $\lambda = 0$ las direcciones asintóticas resuelves la siguiente ecuación

$$(du, dv) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow u = u_0, v \in \mathbb{R}$$

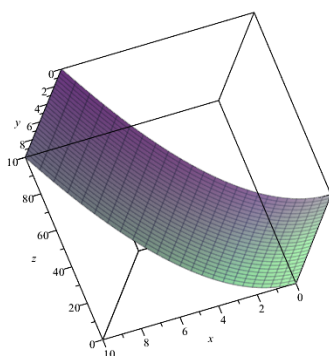
La dirección asintótica es la de curva coordenada $\vec{r}_v$.

e) El punto $(1, 1, 2) = \vec{r}(1, 1)$. La primera forma fundamental es

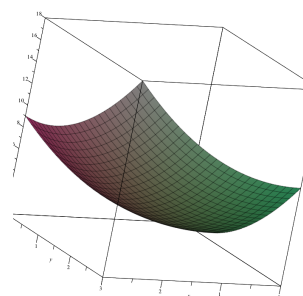
$$I_p = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & -4\lambda uv \\ -4\lambda uv & 1 + 4\lambda^2 v^2 \end{pmatrix}$$

Las curvaturas principales verifican la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M - k_n F & N - k_n G \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k_{n1} = \frac{2}{3}, k_{n2} = \frac{2}{27}$$



(a) $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2)$



(b) $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$

Figura 2: En la fig. de izquierda $\lambda = 0$, a la derecha $\lambda = -1$.

3. a) Sea $\vec{\alpha}_1(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$. Los puntos sobre el eje z tiene la forma $(0, 0, z)$. El vector que une los puntos de $\vec{\alpha}_1(t)$ y del eje z tiene que ser perpendicular al vector $(0, 0, 1)$

$$(\cosh t, \sinh t, t - z) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow t = z$$

La superficie se puede parametrizar como

$$\vec{r}(u, v) = (\cosh u, \sinh u, u) + v(\cosh u, \sinh u, 0)$$

b) El parámetro de distribución $\mu(u) = 1 \neq 0$. No es desarrollable.

c) La generatriz que contiene al punto $(2 \cosh 2, 2 \sinh 2, 2)$ es $\vec{r}(2, v)$. El punto de la directriz que pertenece a dicha generatriz es $\vec{r}(2, 0) = (2 \cosh 2, 2 \sinh 2, 2)$.