

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (2.5 puntos) Sea $\mathcal{C}$ una curva parametrizada y $P = (1, 1, 2)$ un punto de $\mathcal{C}$. Sabiendo que el vector tangente en P es $T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ y el vector normal unitario es $N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$.

- (a) (0.5 punto) Halle el vector binormal en P .
 (b) (1 punto) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta binormal en P .
 (c) (1 punto) Obtenga la ecuación cartesiana del plano rectificante en P .

Solución.

a El vector binormal es:

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$

b Las ecuaciones paramétricas de la recta binormal en P son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

c La ecuación cartesiana del plano rectificante en P es:

$$(x - 1, y - 1, z - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) = 0 \iff x - y = 0.$$

2. (1 punto) Obtenga una parametrización de la curva intersección del paraboloide hiperbólico de ecuación $z = xy$ y el cilindro hiperbólico de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.

Solución. Una parametrización de la curva dada es:

$$r(t) = (\cosh(t), \sinh(t), \sinh(t) \cosh(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. (6.5 puntos) Se considera la curva $\mathcal{C}$ con parametrización

$$\alpha(t) = (t - \sin(t), t, 1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 6\pi].$$

- (a) (0.5 punto) Plantee la integral que habría que calcular para obtener la longitud de la curva.
- (b) (0.5 punto) Defina punto singular y estudie si hay algún punto singular.
- (c) (0.5 punto) ¿Es α la parametrización por la longitud de arco? Justifique la respuesta.
- (d) (2 puntos) Halle las funciones torsión y curvatura.
- (e) (0.5 punto) ¿Es la curva $\mathcal{C}$ una hélice? Justifique la respuesta.
- (f) (0.5 punto) ¿Hay algún valor de t en el que la curvatura se anule? Justifique la respuesta.
- (g) (0.5 punto) ¿Es la curva $\mathcal{C}$ plana? Justifique la respuesta.
- (h) (1.5 puntos) Halle las ecuaciones paramétricas de la circunferencia osculatriz en el punto $P = (0, 0, 0)$.

Solución.

(a) La longitud de la curva viene dada por la siguiente integral:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{6\pi} \|\vec{\alpha}'(t)\| dt = \int_0^{6\pi} \|(1 - \cos(t), 1, \sin(t))\| dt \\ &= \int_0^{6\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + 1 + \sin(t)^2} dt \\ &= \int_0^{6\pi} \sqrt{3 - 2\cos(t)} dt \end{aligned}$$

- (b) Un punto $P = \alpha(t_0)$ de una curva parametrizada se dice singular si $\vec{\alpha}'(t_0) = \vec{0}$. La curva $\alpha(t)$ no tiene puntos singular pues no hay ningún valor del parámetro t para el cual $\vec{\alpha}'(t) = (1 - \cos(t), 1, \sin(t))$ se anule.
- (c) La parametrización $\alpha(t)$ no es la natural (ó parametrización por la longitud de arco) pues el vector $\vec{\alpha}'(t)$ no tiene módulo constante igual a 1.
- (d) Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'(t) &= (1 - \cos(t), 1, \sin(t)), \\ \vec{\alpha}''(t) &= (\sin(t), 0, \cos(t)), \\ \vec{\alpha}'''(t) &= (\cos(t), 0, -\sin(t)), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - \cos(t) & 1 & \sin(t) \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{vmatrix} \\ &= (\cos(t), 1 - \cos(t), -\sin(t)), \\ [\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t)] &= (\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)) \cdot \vec{\alpha}'''(t) \\ &= \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1. \end{aligned}$$

La funciones curvatura y torsión son:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(t) + \cos(t)^2}}{(3 - 2\cos(t))^{3/2}}, \\ \tau(t) &= \frac{[\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t)]}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2} = \frac{1}{2 - 2\cos(t) + \cos(t)^2}.\end{aligned}$$

(e) Como

$$\frac{\kappa(t)}{\tau(t)} \text{ no es constante}$$

sabemos, por el teorema de Lancret, que la curva no es una hélice.

(f) Veamos para qué valores de t el numerador de la curvatura se anula; esto es, para qué valores de t $2 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 = 0$.

Primer camino: Teniendo en cuenta $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ se verifica que:

$$2 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 = 2 + \cos(t)(\cos(t) - 2)$$

y, por tanto, $1 \leq 2 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 \leq 5$.

Segundo camino: Tomando $x = \cos(t)$ queremos ver para qué valores de x se anula la ecuación $2 - 2x + x^2 = 0$. Se tiene:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Por tanto, como la ecuación $2 - 2x + x^2 = 0$ no tiene raíces reales, no hay valores de t para los cuales $2 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 = 0$ y la curvatura no se anula en ningún punto.

(g) La curva $\mathcal{C}$ no es plana ya que la torsión no se anula idénticamente.

(h) Para hallar unas ecuaciones paramétricas de la circunferencia oscultriz en el punto $P = (0, 0, 0)$ calculamos primero el centro y el radio de la circunferencia oscultriz en P . Se tiene:

$$\begin{aligned}P &= \alpha(0), \\ \vec{\alpha}'(0) &= (0, 1, 0), \\ \vec{\alpha}''(0) &= (0, 0, 1), \\ \kappa(0) &= \sqrt{2 - 2\cos(0) + \cos(0)^2} = 1, \\ \vec{t}(0) &= (0, 1, 0), \\ \vec{b}(0) &= \frac{\vec{\alpha}'(0) \wedge \vec{\alpha}''(0)}{\|\vec{\alpha}'(0) \wedge \vec{\alpha}''(0)\|} = (1, 0, 0), \\ \vec{n}(0) &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Por tanto, el radio de la circunferencia oscultriz en P es

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = 1.$$

El centro de la circunferencia osculatriz en P es el punto:

$$Z = P + \rho(0)\vec{n}(0) = (0, 0, 1).$$

Una parametrización de la circunferencia osculatriz en P es:

$$\begin{aligned} r(t) &= Z + \rho(0) (\cos(t)\vec{n}(0) + \sin(t)\vec{t}(0)) \\ &= (0, 0, 1) + \cos(t) (0, 0, 1) + \sin(t) (0, 1, 0) \\ &= (0, \sin(t), 1 + \cos(t)). \end{aligned}$$