

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. Se considera la superficie S parametrizada por

$$r(u, v) = (u + v, u^2 - v^2, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Se pide:

- (a) Indicar, sin resolver, la integral que representa el área de la región de la superficie dada imagen de $[-1, 1] \times [-1, 1]$ mediante la parametrización $r(u, v)$.

Solución. Se tiene:

$$\begin{cases} r_u(u, v) = (1, 2u, 0), \\ r_v(u, v) = (1, -2v, 1), \end{cases}$$

$$r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2u & 0 \\ 1 & -2v & 1 \end{pmatrix} = (2u, -1, -2u - 2v),$$

$$\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| = \sqrt{4u^2 + 1 + (2u + 2v)^2}.$$

Por tanto, el área pedida es

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{4u^2 + 1 + (2u + 2v)^2} du dv.$$

- (b) En qué puntos de la curva $r(1, v)$ las curvas coordenadas son ortogonales.

Solución. Las líneas coordenadas son ortogonales cuando $F(u, v) = r_u(u, v) \cdot r_v(u, v) = 0$. Sobre los puntos de la curva $r(1, v)$ se tiene:

$$\begin{cases} r_u(1, v) = (1, 2, 0), \\ r_v(1, v) = (1, -2v, 1), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(1, v) &= r_u(1, v) \cdot r_v(1, v) \\ &= 1 - 4v. \end{aligned}$$

Por tanto, las líneas coordenadas son ortogonales cuando $v = 1/4$; esto es, en el punto $r(1, 1/4) = (5/4, 15/16, 1/4)$.

- (c) Clasificar el punto $P = (2, -4, 2)$ de la superficie y hallar las direcciones asintóticas de la superficie en el punto P , si existen. Justificar la respuesta.

Solución. Se tiene: $P = r(0, 2)$ y

$$\begin{cases} r_{uu}(u, v) = (0, 2, 0) \\ r_{uv}(u, v) = (0, 0, 0) \\ r_{vv}(u, v) = (0, -2, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} r_{uu}(0, 2) = (0, 2, 0) \\ r_{uv}(0, 2) = (0, 0, 0) \\ r_{vv}(0, 2) = (0, -2, 0) \end{cases}$$

$$r_u(0, 2) \times r_v(0, 2) = (0, -1, -4),$$

$$\|r_u(0, 2) \times r_v(0, 2)\| = \sqrt{17},$$

$$\vec{N}(1, 0) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right).$$

Por tanto,

$$\begin{cases} L(0, 2) = r_{uu}(0, 2) \cdot \vec{N}(0, 2) = -\frac{2}{\sqrt{17}} \\ M(0, 2) = r_{uv}(0, 2) \cdot \vec{N}(0, 2) = 0 \\ N(0, 2) = r_{vv}(0, 2) \cdot \vec{N}(0, 2) = \frac{2}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

La matriz de la segunda forma fundamental en el punto P es:

$$II_P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

$$\det(II_P) < 0$$

El punto P es hiperbólico y, por tanto, hay dos direcciones asintóticas: (h, k) en el plano tangente a la superficie en P . Se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (h, k) \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{17}} (2h^2 - 2k^2) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{17}} (h - k)(h + k). \end{aligned}$$

Por tanto, las dos direcciones asintóticas son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} r_u(0, 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} r_v(0, 2) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} r_u(0, 2) - \frac{1}{\sqrt{2}} r_v(0, 2) \end{aligned}$$

(d) Hallar la curvatura de Gauss en el punto P .

Solución. La curvatura de Gauss en el punto $P = r(0, 2)$ satisface:

$$\kappa_G(0, 2) = \frac{\det(II_P)}{\det(I_P)}$$

donde I_P (resp. II_P) es la matriz de la primera (resp. segunda) forma fundamental en el punto P . Como

$$\begin{cases} r_u(0, 2) = (1, 0, 0), \\ r_v(0, 2) = (1, -4, 1), \end{cases} \implies \begin{cases} E(0, 2) = r_u(0, 2) \cdot r_u(0, 2) = 1 \\ F(0, 2) = r_u(0, 2) \cdot r_v(0, 2) = 1 \\ G(0, 2) = r_v(0, 2) \cdot r_v(0, 2) = 18 \end{cases}$$

$$I_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}, \quad II_P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\kappa_G(0, 2) = \frac{\det(II_P)}{\det(I_P)} = \frac{-\frac{4}{17}}{17} = -\frac{4}{(17)^2}.$$

(e) Hallar la curvatura media en el punto P .

Solución. La curvatura media en el punto $P = r(0, 2)$ satisface:

$$\begin{aligned}
 \kappa_m(0, 2) &= \frac{1}{2} \frac{E(0, 2)N(0, 2) + G(0, 2)L(0, 2) - 2F(0, 2)M(0, 2)}{\det(I_P)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} E(0, 2) & M(0, 2) \\ F(0, 2) & N(0, 2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L(0, 2) & F(0, 2) \\ M(0, 2) & G(0, 2) \end{vmatrix}}{\det(I_P)} \\
 &= \frac{1}{34} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{\sqrt{17}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} & 1 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{34} \left\{ \frac{2}{\sqrt{17}} - \frac{36}{\sqrt{17}} \right\} = \frac{-1}{\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

2. Inspirados en la obra de E. Dieste, se propone como fachada la superficie reglada cuyas generatrices, paralelas al plano $x = 0$, se apoyan en la curva:

$$\alpha(u) = (u, \cos(u), 5), \quad u \in [0, 10\pi],$$

y la recta $y = 1, z = 0$. Se pide:

- (a) Obtener una parametrización de dicha superficie.

Solución. Una parametrización de la recta dada es:

$$\beta(v) = (v, 1, 0), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Consideramos todos los vectores que unen puntos de la curva $\alpha(u)$ con puntos de la curva $\beta(v)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha(u)\beta(v)} &= \overrightarrow{O\beta(v)} - \overrightarrow{O\alpha(u)} \\ &= (v, 1, 0) - (u, \cos(u), 5) \\ &= (v - u, 1 - \cos(u), -5). \end{aligned}$$

Como queremos que las rectas sean paralelas al plano $x = 0$, tomamos: $v = u$ por tanto, consideramos las rectas con vector director:

$$\vec{w}(u) = \overrightarrow{\alpha(u)\beta(u)} = (0, 1 - \cos(u), -5).$$

Una parametrización de la superficie es:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \alpha(u) + v\vec{w}(u) \\ &= (u, \cos(u), 5) + v(0, 1 - \cos(u), -5) \\ &= (u, \cos(u) + v - v\cos(u), 5 - 5v), \quad u \in [0, 10\pi], \quad v \in [0, 1]. \end{aligned}$$

- (b) ¿Es una superficie alabeada? Clasificar sus puntos.

Solución. El parámetro de distribución es:

$$\begin{aligned} p(u) &= [\alpha'(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)] \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\sin(u) & 0 \\ 0 & 1 - \cos(u) & -5 \\ 0 & \sin(u) & 0 \end{pmatrix} \\ &= 5 \sin(u). \end{aligned}$$

Por tanto, la superficie es no desarrollable (alabeada). Se tiene:

$$p(u) = 5 \sin(u) = 0 \text{ cuando } u = k\pi, \text{ con } 0 \leq k \leq 10, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los puntos de las rectas $r(k\pi, v)$ con $0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{Z}$ son parabólicos y el resto de puntos de la superficie son hiperbólicos.

- (c) Indicar si existen generatrices de puntos parabólicos.

Solución. Las curvas $r(k\pi, v)$, $v \in [0, 1]$, con $0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{Z}$ son las únicas generatrices de puntos parabólicos.

- (d) Determinar la generatriz que contiene al punto $r(3\pi, 0)$.

Solución. La generatriz que contiene al punto $r(3\pi, 0)$ es la recta $r(3\pi, v)$, $v \in [0, 1]$.

3. Sabiendo que las matrices de la primera y segunda forma fundamental de una superficie con parametrización $r(u, v)$, $u \in (0, 2\pi)$ son:

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2 + \cos(u))^2 \end{pmatrix} \text{ y } II(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(u)(2 + \cos(u)) \end{pmatrix}.$$

Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar las respuestas.

- (a) Las líneas coordenadas $r(\pi, v)$ y $r(u, 0)$ se cortan ortogonalmente en el punto $r(\pi, 0)$.

Verdadero. Como $F(u, v) = 0$ todas las líneas coordenaas se cortan ortogonalmente en el punto de intersección.

- (b) Todos los puntos de la superficie son elípticos.

Falso. Se tiene: $\det(II(u, v)) = \cos(u)(2 + \cos(u))$, por tanto, para valores de $u \in (\pi/2, 3\pi/2)$ se tiene:

$$\det(II(u, v)) = \cos(u)(2 + \cos(u)) < 0, u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\det(II(u, v)) = \cos(u)(2 + \cos(u)) = 0, u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},$$

$$\det(II(u, v)) = \cos(u)(2 + \cos(u)) > 0, u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

- (c) La dirección dada por el vector r_u es una dirección asintótica.

Falso. La dirección del vector r_u es la dirección $(1, 0)$ en la base $\{r_u, r_v\}$ del plano tangente a la superficie. se tiene:

$$\kappa_n((1, 0)) = \frac{(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(u)(2 + \cos(u)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2 + \cos(u))^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1 \neq 0.$$

- (d) El punto $r(\pi, 0)$ es un punto elíptico.

Falso. El punto $r(\pi, 0)$ es un punto hiperbólico pues:

$$\det(II(\pi, 0)) = \cos(\pi)(2 + \cos(\pi)) = -1 < 0.$$