

rtual

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (6,5 puntos) Se considera la superficie $\mathcal{S}$ parametrizada por

$$r(u, v) = (u, v, e^u + v^3 - v^2), \quad u \in [-1, 1], \quad v \in [-1, 1].$$

Se pide:

- (a) (0,5 puntos) La matriz de la primera forma fundamental de $\mathcal{S}$ en un punto genérico.

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= (1, 0, e^u) \\ r_v(u, v) &= (0, 1, 3v^2 - 2v) \\ I_{r(u, v)} &= \begin{pmatrix} e^{2u} + 1 & e^u (3v^2 - 2v) \\ e^u (3v^2 - 2v) & 1 + (3v^2 - 2v)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (b) (0,5 puntos) Vector normal a la superficie en un punto genérico.

$$\begin{aligned} r_u(u, v) \wedge r_v(u, v) &= (-e^u, -3v^2 + 2v, 1), \\ \|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\| &= \sqrt{e^{2u} + (3v^2 - 2v)^2 + 1} \\ \vec{N}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{e^{2u} + (3v^2 - 2v)^2 + 1}} (-e^u, 3v^2 - 2v, 1). \end{aligned}$$

- (c) (0,5 puntos) La integral que habría que calcular para hallar el área de dicha superficie.

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{e^{2u} + (3v^2 - 2v)^2 + 1} du dv$$

- (d) (0,5 puntos) La ecuación cartesiana del plano tangente a $\mathcal{S}$ en $P = (0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} P &= r(0, 0), \\ \vec{N}(0, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1), \\ \overrightarrow{PX} \cdot \vec{N}(0, 0) &= 0 \iff (x, y, z - 1) \cdot \vec{N}(0, 0) = 0 \\ &\iff (x, y, z - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1) = 0 \\ &\iff -x + z - 1 = 0. \end{aligned}$$

- (e) (1 punto) Un vector en el plano tangente a la superficie que sea ortogonal a la curva $\gamma(t) = r(-t, 2t)$ en el punto P .

$$\gamma'(t) = -1r_u(-t, 2t) + 2r_v(-t, 2t) \equiv (-1, 2).$$

La dirección (h, k) del plano tangente a $\mathcal{S}$ en P es ortogonal a la dirección $(-1, 2)$ si y sólo si:

$$\begin{aligned}(h, k) I_P \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \iff (h, k) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 2k - 2h = 0 \\ &\iff h = k.\end{aligned}$$

El vector

$$\begin{aligned}\vec{w} &= (1, 1) = 1r_u(0, 0) + 1r_v(0, 0) \\ &= (1, 0, 1) + (0, 1, 0) = (1, 1, 1)\end{aligned}$$

es ortogonal a la curva $\gamma(t) = r(-t, 2t)$ en el punto P .

(f) (0,5 puntos) La matriz de la segunda forma fundamental $\mathcal{S}$ en un punto genérico.

$$\begin{aligned}r_{uu}(u, v) &= (0, 0, e^u), \\ r_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ r_{vv}(u, v) &= (0, 0, 6v - 2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{uu}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) &= \frac{e^u}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|}, \\ r_{uv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) &= 0, \\ r_{vv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) &= \frac{6v-2}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|},\end{aligned}$$

$$II_{r(u, v)} = \frac{1}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|} \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & 6v - 2 \end{pmatrix}.$$

(g) (1 punto) Clasificar el punto P y hallar las direcciones asintóticas en P , si existen, expresadas como vectores en $\mathbb{R}^3$.

$$II_{r(0,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(II_{r(0,0)}) < 0$ el punto P es un punto hiperbólico.

Las direcciones asintóticas en P satisfacen:

$$\begin{aligned}(h, k) II_P \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} &= 0 \iff \frac{1}{\sqrt{2}} (h, k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{2}} (h^2 - 2k^2) = 0 \\ &\iff h = \sqrt{2}k \text{ ó } h = -\sqrt{2}k.\end{aligned}$$

Las direcciones de los vectores

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= (\sqrt{2}, 1) = \sqrt{2}r_u(0, 0) + 1r_v(0, 0) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}), \\ \vec{w}_2 &= (-\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2}r_u(0, 0) + 1r_v(0, 0) = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}),\end{aligned}$$

son asintóticas.

- (h) (1 punto) Las curvaturas principales y las direcciones principales en el punto P expresadas como vectores en $\mathbb{R}^3$. Se tiene:

$$I_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } II_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Las direcciones principales son:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= (1, 0) = 1r_u(0, 0) + 0r_v(0, 0) = (1, 0, 1), \\ \vec{w}_2 &= (0, 1) = 0r_u(0, 0) + 1r_v(0, 0) = (0, 1, 0), \end{aligned}$$

y las curvaturas principales son:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_n((1, 0)) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ k_2 &= k_n((0, 1)) = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

- (i) (0,5 puntos) Clasificar los puntos de la curva $v = 0$.

$$II_{r(u,0)} = \frac{1}{\sqrt{e^{2u}+1}} \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(II_{r(u,0)}) < 0 \text{ los puntos de } v = 0 \text{ son hiperbólicos.}$$

- (j) (0,5 puntos) Dar una curva en $\mathcal{S}$ de puntos parabólicos.

$$\gamma(u) = r\left(u, \frac{1}{3}\right) = \left(u, \frac{1}{3}, e^u - \frac{2}{27}\right).$$

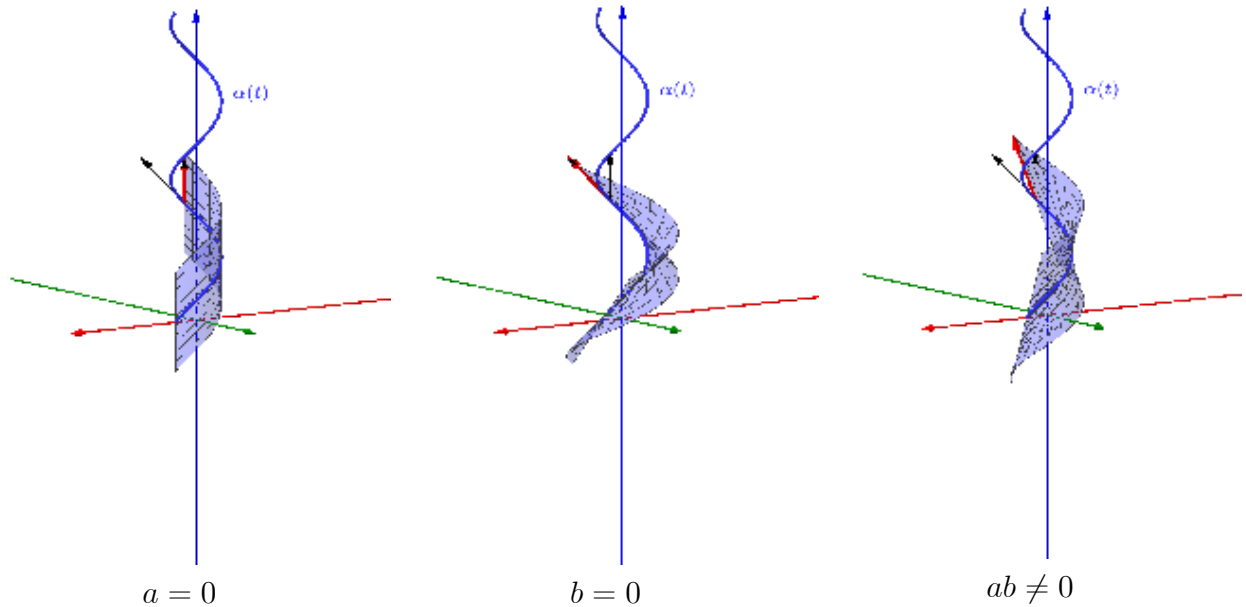
2. (2,5 puntos) Se considera la superficie reglada $\mathcal{S}$ con parametrización:

$$r(u, v) = \alpha(u) + v(a\vec{\alpha}'(u) + b\vec{e}_3), \quad 0 \leq u \leq 4\pi, \quad 0 \leq v \leq 1$$

con $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$ y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Se pide:

(a) (0,5 puntos) Hacer un esbozo de $\mathcal{S}$.



(b) (0,5 puntos) Calcular el parámetro de distribución.

$$\begin{aligned} p(u) &= [\vec{\alpha}'(u), a\vec{\alpha}'(u) + b\vec{e}_3, a\vec{\alpha}''(u)] \\ &= [\vec{\alpha}'(u), b\vec{e}_3, a\vec{\alpha}''(u)] \\ &= ab[\vec{\alpha}'(u), \vec{e}_3, \vec{\alpha}''(u)] \\ &= ab \det \begin{pmatrix} -\sin(u) & \cos(u) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos(u) & -\sin(u) & 0 \end{pmatrix} = -ab. \end{aligned}$$

(c) Valores de los parámetros a y b para los cuales se cumple:

- i. (0,5 puntos) La superficie $\mathcal{S}$ es una superficie desarrollable tangencial. $a \neq 0$ y $b = 0$.
- ii. (0,5 puntos) La superficie $\mathcal{S}$ es una superficie cilíndrica. $a = 0$ y $b \neq 0$.
- iii. (0,5 puntos) La superficie $\mathcal{S}$ es no desarrollable. $ab \neq 0$.

3. (1 punto) Una superficie $\mathcal{S}$ tiene, en el punto P , curvaturas principales -1 y 7 . Se pide:
- (a) (0,5 puntos) Estudiar si existe alguna curva de $\mathcal{S}$ que contenga al punto P y con curvatura normal -2 en P .
 - (b) (0,5 puntos) ¿Cuántas direcciones asintóticas hay en el plano tangente a la superficie en P ? Justificar la respuesta.

Solución.

- (a) La curvatura normal en la dirección de un vector $\vec{u}$ del plano tangente a $\mathcal{S}$ en P está acotada por los valores de las curvaturas principales:

$$-1 \leq k_n(\vec{u}) \leq 7$$

por tanto, no hay ninguna curva en $\mathcal{S}$ que contenga al punto P y con curvatura normal -2 en P .

- (b) Como

$$-1 \leq k_n(\vec{u}) \leq 7$$

hay una dirección $\vec{u}$ en el plano tangente a $\mathcal{S}$ en P que es asintótica.