

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. Se considera la superficie S parametrizada por

$$r(u, v) = \left(u, \frac{3v^2 + u^2}{3}, v \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

y el punto $P = (1, \frac{1}{3}, 0)$ de la misma. Se pide:

- (a) Indicar, sin resolver, la integral que representa el área de la región de la superficie dada imagen de $[-1, 1] \times [-1, 1]$ mediante la parametrización $r(u, v)$.

Solución. Se tiene:

$$\begin{cases} r_u(u, v) = (1, \frac{2u}{3}, 0) \\ r_v(u, v) = (0, 2v, 1) \end{cases}$$

$$r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & \frac{2u}{3} & 0 \\ 0 & 2v & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{2u}{3}, -1, 2v \right),$$

$$\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| = \sqrt{\frac{4u^2}{9} + 1 + 4v^2}.$$

Por tanto, el área pedida es

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{4u^2}{9} + 1 + 4v^2} du dv.$$

- (b) Clasificar el punto P de la superficie y hallar las direcciones asintóticas de la superficie en el punto P , si existen. Justificar la respuesta.

Solución. Se tiene: $P = r(1, 0)$ y

$$\begin{cases} r_{uu}(u, v) = (0, \frac{2}{3}, 0) \\ r_{uv}(u, v) = (0, 0, 0) \\ r_{vv}(u, v) = (0, 2, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} r_{uu}(1, 0) = (0, \frac{2}{3}, 0) \\ r_{uv}(1, 0) = (0, 0, 0) \\ r_{vv}(1, 0) = (0, 2, 0) \end{cases}$$

$$r_u(1, 0) \times r_v(1, 0) = \left(\frac{2}{3}, -1, 0 \right),$$

$$\|r_u(1, 0) \times r_v(1, 0)\| = \sqrt{\frac{4}{9} + 1} = \sqrt{\frac{13}{9}}$$

$$\vec{N}(1, 0) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right)$$

Por tanto,

$$\begin{cases} L(1, 0) = r_{uu}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ M(1, 0) = r_{uv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = 0 \\ N(1, 0) = r_{vv}(1, 0) \cdot \vec{N}(1, 0) = -\frac{6}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

La matriz de la segunda forma fundamental en el punto P es:

$$II_P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

$$\det(II_P) > 0$$

El punto P es elíptico y, por tanto, no hay direcciones asintóticas en P .

- (c) Hallar la curvatura normal de la superficie dada en el punto P en la dirección $r_u + r_v$.

Solución. Se tiene:

$$\begin{cases} r_u(1, 0) = (1, \frac{2}{3}, 0) \\ r_v(1, 0) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} E(1, 0) = r_u(1, 0) \cdot r_u(1, 0) = \frac{13}{9} \\ F(1, 0) = r_u(1, 0) \cdot r_v(1, 0) = 0 \\ G(1, 0) = r_v(1, 0) \cdot r_v(1, 0) = 1 \end{cases}$$

La matriz de la primera forma fundamental en el punto P es:

$$I_P = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La curvatura normal en P en la dirección del vector $r_u + r_v = (1, 1)$ es:

$$\kappa_n((1, 1)) = \frac{(1, 1) \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1, 1) \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\frac{8}{13}\sqrt{13}}{\frac{22}{9}} = -\frac{36}{143}\sqrt{13}.$$

- (d) Hallar los valores máximo y mínimo de la curvatura normal en el punto P .

Solución. Los valores máximo y mínimo de la curvatura normal en el punto P son las curvaturas principales en P y son los autovalores de la siguiente matriz:

$$I_P^{-1}II_P = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{169}\sqrt{13} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{13}\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

Por tanto, los valores máximo y mínimo de la curvatura normal en P son:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{18}{169}\sqrt{13}, \\ \kappa_2 &= -\frac{6}{13}\sqrt{13}. \end{aligned}$$

2. Se considera la superficie reglada S formada por las rectas que se apoyan en la curva

$$\alpha(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t), \quad t \in (0, 4\pi),$$

y contienen al punto $Q = (0, 0, -6)$. se pide:

- (a) Parametrizar la superficie S utilizando como directriz la curva $\alpha(t)$.

Solución. Se tiene:

$$\begin{aligned} r(t, \lambda) &= \alpha(t) + \overrightarrow{\lambda \alpha(t)Q} = \alpha(t) + \lambda(Q - \alpha(t)) \\ &= (t \cos(t), t \sin(t), t) + \lambda(-t \cos(t), -t \sin(t), -6 - t), \quad t \in (0, 4\pi), \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

- (b) Clasificar la superficie reglada del enunciado. Clasificar todos los puntos de la superficie.

Solución. Para este apartado voy a considerar otra parametrización de la superficie en la que considero el punto Q como curva directriz:

$$\begin{aligned} r(t, \lambda) &= Q + \overrightarrow{\lambda Q\alpha(t)} = Q + \lambda(\alpha(t) - Q) \\ &= (0, 0, -6) + \lambda(t \cos(t), t \sin(t), t + 6), \quad t \in (0, 4\pi), \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Se tiene: $Q' = \vec{0}$ por tanto el parámetro de distribución es idénticamente nulo y la superficie es de tipo CONO. Todos los puntos de la superficie son parabólicos.

- (c) Parametrizar la generatriz que contiene al punto $(-\pi, 0, \pi)$.

Solución. La generatriz que contiene al punto $P = (-\pi, 0, \pi)$ también contiene al punto $Q = (0, 0, -6)$ por tanto es la recta que contiene a ambos puntos y se puede parametrizar como sigue:

$$\alpha(\lambda) = P + \overrightarrow{\lambda PQ} = (-\pi, 0, \pi) + \lambda(\pi, 0, -\pi - 6), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Otra solución: Con la parametrización del apartado (b) el punto $(-\pi, 0, \pi)$ se alcanza para los valores $\lambda = 1$ y $t = \pi$. Por tanto, la generatriz pedida es:

$$r(\pi, \lambda) = (0, 0, -6) + \lambda(-\pi, 0, \pi + 6), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (d) Hallar el plano tangente a cada uno de los puntos de la generatriz que contiene al punto $(-\pi, 0, \pi)$.

Solución. Como a lo largo de una generatriz de una superficie tipo cono el plano tangente no varía, podemos calcular directamente el plano tangente a la superficie en el punto $(-\pi, 0, \pi)$. La dirección ortogonal al plano tangente en el punto dado es (uso la parametrización del apartado (b)).

$$\begin{cases} r_t(t, \lambda) = \lambda(\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), 1) \\ r_\lambda(t, \lambda) = (t \cos(t), t \sin(t), t + 6) \end{cases} \implies \begin{cases} r_t(\pi, 1) = (-1, -\pi, 1) \\ r_\lambda(\pi, 1) = (-\pi, 0, \pi + 6) \end{cases}$$

La ecuación del plano tangente es:

$$\begin{vmatrix} x + \pi & y & z - \pi \\ -1 & -\pi & 1 \\ -\pi & 0 & \pi + 6 \end{vmatrix} = 6y - (\pi^2 + 6\pi)x - \pi^2 z - 6\pi^2 = 0.$$

3. Se considera la superficie de revolución con parametrización

$$r(t, \theta) = (g(t) \cos(\theta), g(t) \sin(\theta), t), \quad \theta \in [0, 2\pi), t \geq 0,$$

donde $g(t)$ es una función positiva, continua y derivable. Se pide:

- (a) Matriz asociada a la primera forma fundamental en un punto genérico de la superficie.

Solución. Se tiene:

$$\begin{cases} r_t(t, \theta) = (g'(t) \cos(\theta), g'(t) \sin(\theta), 1), \\ r_\theta(t, \theta) = (-g(t) \sin(\theta), g(t) \cos(\theta), 0), \end{cases} \implies \begin{cases} E(t, \theta) = r_t(t, \theta) \cdot r_t(t, \theta) = g'(t)^2 + 1, \\ F(t, \theta) = r_t(t, \theta) \cdot r_\theta(t, \theta) = 0, \\ G(t, \theta) = r_\theta(t, \theta) \cdot r_\theta(t, \theta) = g(t)^2, \end{cases}$$

por tanto, la matriz pedida es:

$$\begin{pmatrix} g'(t)^2 + 1 & 0 \\ 0 & g(t)^2 \end{pmatrix}.$$

- (b) El ángulo que forman las líneas coordenadas en un punto genérico de la superficie.

Solución. Como $F(t, \theta) = 0$, el ángulo que forman las líneas coordenadas en un punto genérico de la superficie es $\frac{\pi}{2}$.

- (c) Hallar las curvas coordenadas indicando si algunas de ellas son circunferencias. En tal caso, hallad los centros y los radios de cada una de ellas y los respectivos planos que las contienen.

Solución. Las curvas coordenadas son:

$$\begin{aligned} r(t, \theta_0) &= (g(t) \cos(\theta_0), g(t) \sin(\theta_0), t), \quad t \geq 0, \\ r(t_0, \theta) &= (g(t_0) \cos(\theta), g(t_0) \sin(\theta), t_0), \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Para cada $t = t_0$ fijo la curva $r(t_0, \theta)$ es una circunferencia de centro el punto $(0, 0, t_0)$, radio $g(t_0)$, contenida en el plano $z = t_0$.