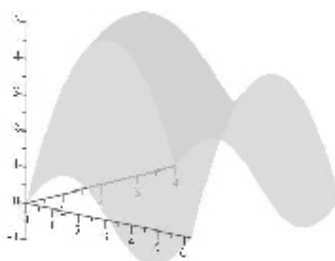


APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

1. (5 puntos) Consideremos las curvas $\mathcal{C}_1$ con parametrización $\gamma_1(u) = (u, 0, \sin(u))$, $u \in [0, 2\pi]$, y $\mathcal{C}_2$ con parametrización $\gamma_2(v) = (0, v, 4v - v^2)$, $v \in [0, 4]$. La superficie $\mathcal{S}$ obtenida trasladando $\mathcal{C}_1$ sobre $\mathcal{C}_2$ está parametrizada por

$$r(u, v) = \gamma_1(u) + \gamma_2(v), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 4].$$



- (a) (0,75 puntos) ¿Es $\mathcal{S}$ una superficie regular? Justificar la respuesta. Calcular además el vector normal a la superficie en un punto genérico.

Se tiene:

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= \gamma'_1(u) = (1, 0, \cos(u)), \\ r_v(u, v) &= \gamma'_2(v) = (0, 1, -2v + 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_u(u, v) \wedge r_v(u, v) &= (-\cos(u), 2v - 4, 1), \\ \|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\| &= \sqrt{\cos^2(u) + (2v - 4)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{N}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u) + (2v - 4)^2 + 1}} (-\cos(u), 2v - 4, 1).$$

Como $\vec{N}(u, v)$ no se anula para ningún valor de u ni de v todos los puntos de la superficie son regulares.

- (b) (0,5 puntos) Calcular los coeficientes de la matriz de la primera forma fundamental.

Se tiene:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= r_u(u, v) \cdot r_u(u, v) = 1 + \cos^2(u), \\ F(u, v) &= r_u(u, v) \cdot r_v(u, v) = (-2v + 4) \cos(u), \\ G(u, v) &= r_v(u, v) \cdot r_v(u, v) = 1 + (-2v + 4)^2. \end{aligned}$$

- (c) (1 punto) Calcular el coseno del ángulo que forman las curvas coordenadas en un punto genérico de la superficie $P = r(u, v)$. ¿En qué puntos de $\mathcal{S}$ son las curvas coordenadas ortogonales?

$$\cos \alpha = \frac{r_u(u, v) \cdot r_v(u, v)}{\|r_u(u, v)\| \|r_v(u, v)\|} = \frac{(-2v + 4) \cos(u)}{\sqrt{(-2v + 4) \cos(u)} \sqrt{1 + (-2v + 4)^2}}.$$

Las curvas coordenadas son ortogonales si y sólo si:

$$\begin{aligned} (-2v + 4) \cos(u) &= 0 \iff -2v + 4 = 0 \text{ ó } \cos(u) = 0 \\ &\iff v = 2 \text{ ó } u = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, las curvas coordenadas son ortogonales en los puntos de las curvas:

$$\begin{aligned} r(u, 2) &= (u, 0, \sin(u)) + (0, v, 4), \\ r\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &= \left(\frac{\pi}{2}u, 0, 1\right) + (0, v, -v^2 + 4v), \\ r\left(\frac{3\pi}{2}, v\right) &= \left(\frac{3\pi}{2}, 0, -1\right) + (0, v, -v^2 + 4v). \end{aligned}$$

- (d) (0,5 puntos) Calcular los coeficientes de la matriz de la segunda forma fundamental. Se tiene:

$$\begin{aligned} r_{uu}(u, v) &= \gamma_1''(u) = (0, 0, -\sin(u)), \\ r_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ r_{vv}(u, v) &= \gamma_2''(v) = (0, 0, -2), \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} L(u, v) &= r_{uu}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{-\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u) + (2v-4)^2 + 1}}, \\ M(u, v) &= r_{uv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = 0, \\ N(u, v) &= r_{vv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{-2}{\sqrt{\cos^2(u) + (2v-4)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

- (e) (1 punto) En los puntos de la curva coordenada con $v = 2$, calcular las curvaturas principales y las direcciones principales como vectores de $\mathbb{R}^3$.

$$I_{r(u,2)} = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II_{r(u,2)} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)+1}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{\cos^2(u)+1}} \end{pmatrix}.$$

Direcciones principales:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (1, 0) = r_u(u, 1) = (1, 0, \cos(u)), \\ \vec{u}_2 &= (0, 1) = r_v(u, v) = (0, 1, 0). \end{aligned}$$

Y las curvaturas principales son:

$$k_1 = k_n((1, 0)) = \frac{(1,0) \begin{pmatrix} \frac{-\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)+1}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{\cos^2(u)+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1,0) \begin{pmatrix} 1 + \cos^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{-\sin(u)}{(1 + \cos^2(u))^{3/2}},$$

$$k_2 = k_n((0, 1)) = \frac{(0,1) \begin{pmatrix} \frac{-\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)+1}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{\cos^2(u)+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(0,1) \begin{pmatrix} 1 + \cos^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{-2}{\sqrt{\cos^2(u) + 1}}.$$

- (f) (0,75 puntos) Obtener la curvatura total o de Gauss en los puntos de $\mathcal{S}$ con $v = 2$. Clasificar los puntos $P_1 = r(\pi/2, 2)$ y $P_2 = r(3\pi/2, 2)$.

La curvatura de Gauss en los puntos de $\mathcal{S}$ con $v = 2$ es:

$$k_G = k_1 k_2 = \frac{2 \sin(u)}{(1 + \cos^2(u))^2}.$$

Se tiene:

$$k_G(\pi/2, 2) = \frac{2 \sin(\pi/2)}{(1 + \cos^2(\pi/2))^2} > 0$$

$$k_G(3\pi/2, 2) = \frac{2 \sin(3\pi/2)}{(1 + \cos^2(3\pi/2))^2} < 0$$

por tanto, el punto $P_1 = r(\pi/2, 2)$ es elíptico y el punto $P_2 = r(3\pi/2, 2)$ es hiperbólico.

- (g) (0,5 puntos) Obtener los puntos parabólicos de $\mathcal{S}$ con $v = 2$.

Los puntos parabólicos de $\mathcal{S}$ con $v = 2$ son aquellos tales que $k_G = 0$ esto es,

$$k_G = \frac{2 \sin(u)}{(1 + \cos^2(u))^2} = 0 \iff u = 0, \pi \text{ ó } 2\pi.$$

2. (3 puntos) Se considera la superficie $\mathcal{S}$ generada por los segmentos que se apoyan en las curvas

$$\alpha_1(t) = (0, t, 6 - t^2), \quad -2 \leq t \leq 2,$$

$$\alpha_2(u) = (3, 2u, 0), \quad -1 \leq u \leq 1,$$

y que son paralelos al plano $y = 0$. Se pide:

- (a) (1 punto) Una parametrización de dicha superficie.

$$r(u, v) = \alpha(u) + v\vec{w}(u), \quad -1 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

$$\text{con } \alpha(u) = (0, 2u, 6 - 4u^2), \text{ y } \vec{w}(u) = (3, 0, -6 + 4u^2).$$

- (b) (0,5 puntos) La generatriz de la superficie que contiene al punto $P = (3, 1, 0)$ y hallar los puntos de intersección de dicha generatriz con las curvas $\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(u)$.

Se tiene: $P = (3, 1, 0) = r(1/2, 1)$. Por tanto la generatriz que contiene al punto P es:

$$r(1/2, v) = (0, 1, 5) + v(3, 0, -5), \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Los puntos de intersección de la generatriz $r(1/2, v)$ con las curvas $\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(u)$ son:

$$\begin{aligned} r(1/2, 0) &= (0, 1, 5), \\ r(1/2, 1) &= (3, 1, 0). \end{aligned}$$

- (c) (0,5 puntos) Sabiendo que el parámetro de distribución de la superficie es $p(u) = -48u$, clasificar la superficie reglada obtenida.

Como $p(u)$ no es idénticamente nulo, la superficie es no desarrollable.

- (d) (1 punto) Obtener una generatriz a lo largo de la cual el plano tangente a la superficie no varíe.

Como los puntos de la generatriz

$$\begin{aligned} r(0, v) &= \alpha(0) + v\vec{w}(0), \quad 0 \leq v \leq 1, \\ \text{con } \alpha(0) &= (0, 0, 6), \text{ y } \vec{w}(0) = (3, 0, -6), \end{aligned}$$

son todos parabólicos el plano tangente a lo largo de dicha generatriz no varía.

3. (2 puntos) Clasifique los siguientes puntos de una superficie sabiendo que:

- (a) (0,5 puntos) En P_1 la curvatura media es cero y la curvatura de Gauss es distinta de cero.

P_1 es hiperbólico.

- (b) (0,5 puntos) En P_2 existe solo una dirección asintótica.

P_2 es parabólico.

- (c) (0,5 puntos) En P_3 la fórmula de Euler para la curvatura normal es: $k_N(\alpha) = \cos^2(\alpha) + 2\sin^2(\alpha)$.

P_3 es elíptico.

- (d) (0,5 puntos) En P_4 la curvatura de Gauss y la curvatura media son cero.

P_4 es plano.