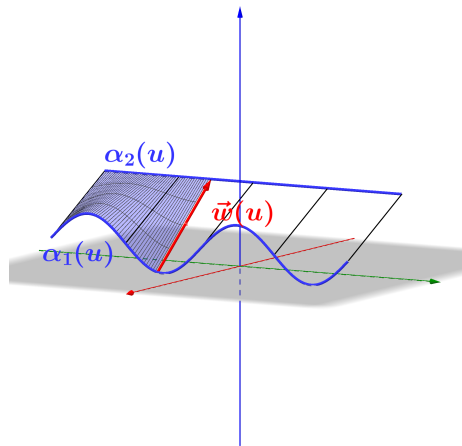

HOJA DE PROBLEMAS: SUPERFICIES REGLADAS

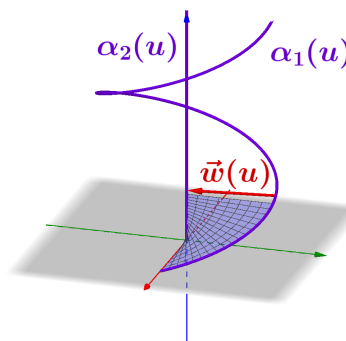
1 Parametrización de superficies regladas

Parametrizar las siguientes superficies regladas:

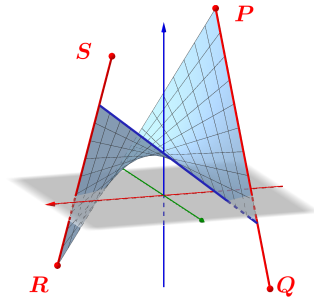
1. Superficie reglada formada por los segmentos que se apoyan en la curva con parametrización: $\alpha_1(u) = (3, u, 1 + \sin(u))$, $-2\pi \leq u \leq 2\pi$, y en la recta con parametrización $\alpha_2(u) = (-1, u, 3)$, $-2\pi \leq u \leq 2\pi$.



2. El **helicoides** es la superficie reglada por los segmentos que se apoyan en una hélice y en el eje de la misma. Parametrizar el helicoides formado por los segmentos que se apoyan en la hélice con parametrización: $\alpha_1(u) = (2 \cos(u), 2 \sin(u), u)$, $0 \leq u \leq 4\pi$, y en la recta con parametrización: $\alpha_2(u) = (0, 0, u)$, $0 \leq u \leq 4\pi$.



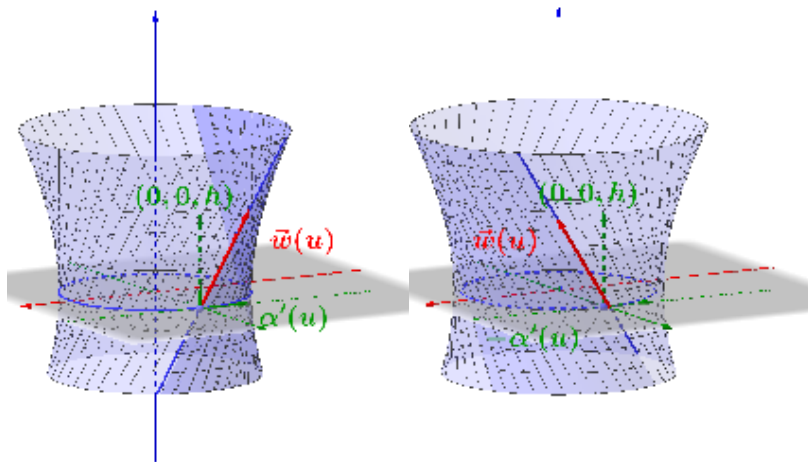
3. El **paraboloide hiperbólico** es la superficie reglada por los segmentos que se apoyan en dos segmentos no paralelos. Parametrizar el paraboloide hiperbólico formado por los segmentos que unen los puntos de los segmentos RS y PQ , como muestra el dibujo, siendo $P = (-1, 1, 0)$, $Q = (1, 1, 3)$, $R = (-1, -1, 3)$ y $S = (1, -1, 0)$.



Ejemplo: Pabellón Phillips de la Exposición Universal de Bruselas de 1958, diseñado por Le Corbusier e Iannis Xenaxis en el que destaca el paraboloide hiperbólico de la cubierta.

4. Superficie reglada cuya directriz es una circunferencia, por ejemplo, la circunferencia parametrizada: $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, y tal que el vector director $\vec{w}(u)$ de la generatriz en cada punto de la circunferencia es un vector contenido en el plano rectificante de la curva en el punto $\alpha(u)$. Por tanto, $\vec{w}(u)$ es combinación lineal del vector tangente y el vector binormal a la curva en $\alpha(u)$; esto es,

$$\vec{w}(u) = \cos(\beta)\vec{t}(u) + \sin(\beta)\vec{b}(u), \text{ con } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$



Nótese que se excluyen los siguientes casos:

- $\beta = 0$, la recta es la recta tangente y en ese caso la superficie sería un plano.
- $\beta = \pi/2$ la recta es la recta binormal y en este caso la superficie sería un cilindro circular.

5. Superficie generada por los segmentos que se apoyan en la curva parametrizada $\alpha_1(u) = (u, \sin(u), 0)$, $-2\pi \leq u \leq 2\pi$, y en el segmento: $y = 0$, $z = 5$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.
6. Superficie reglada con curva directriz la curva de ecuaciones cartesianas $z = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ y cuyas generatrices contienen al punto $(0, 0, 0)$.
7. Superficie generada por las rectas tangentes a la curva parametrizada $\sigma(u) = (e^u, e^{-u}, u)$, $u \in [-2, 2]$.
8. Superficie generada por las rectas perpendiculares al plano $x + y + z = 1$ que se apoyan en la curva $\alpha(u) = (\cos^2(u), \sin^2(u), u)$, $u \in [0, 2\pi]$.
9. Superficie generada por las rectas que se apoyan en la curva de ecuaciones: $4x^2 + 2y^2 = 3$, $z = 0$ y paralelas a la recta de ecuaciones $x + y + z = 1$, $x - 2y = 0$.
10. Superficie generada por los segmentos contenidos en el haz de planos que contiene al eje OZ y que se apoyan en las curvas:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, z = 0 \right\}, \\ C_2 &\equiv \{x^2 + y^2 = 1, z = 20\}. \end{aligned}$$

11. Superficie generada por los segmentos que se apoyan en las curvas:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}, \\ C_2 &\equiv \{x^2 + y^2 = 1, z = 4\}, \end{aligned}$$

y que son paralelos a la recta de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$.

12. Superficie generada por los segmentos paralelos al plano $x = 0$ y que se apoyan en las curvas:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \left\{ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0 \right\}, \\ C_2 &\equiv \{z = x + 2, y = 0\}. \end{aligned}$$

13. Superficie generada por los segmentos paralelos al plano $z = 0$ y que se apoyan en las curvas situadas en el primer octante:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 1, y = 0\} \\ C_2 &= \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 1, x = 0\}. \end{aligned}$$

2 Clasificación y análisis de superficies regladas

1. Estudiar si son desarrollables las superficies del ejercicio de la sección anterior.
2. **Interpolación bilineal.** Se consideran los puntos $c_0 = (0, 0, 0)$, $c_1 = (1, 0, 0)$, $c_2 = (0, 1, 0)$ y $c_3 = (1, 1, a)$, y los segmentos $\overline{c_0c_1}$ y $\overline{c_2c_3}$. Se pide:
 - (a) Parametrizar la superficie formada por los segmentos que se apoyan en los segmentos $\overline{c_0c_1}$ y $\overline{c_2c_3}$.
 - (b) Dibujar la superficie reglada obtenida.
 - (c) Estudiar para qué valores del parámetro a la superficie es desarrollable y determinar la superficie obtenida para dichos valores de a .

Nota: El comando **Surface from four points** de Grasshopper realiza la construcción anterior.

3. Se considera la elipse intersección del plano $z = 0$ con el cilindro elíptico de ecuación cartesiana: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Se pide:
 - (a) Dar una parametrización $c(u)$ de la elipse del enunciado.
 - (b) Obtener una parametrización $d(u)$ de la elipse obtenida al rotar la elipse $c(u)$ un ángulo α y trasladarla después en la dirección del vector $(0, 0, 5)$.
 - (c) Obtener una parametrización de la superficie reglada formada por rectas que se apoyan en las elipses de los apartados (a) y (b).
 - (d) Dibujar la superficie reglada obtenida.
 - (e) Estudiar para qué valor del ángulo α la superficie reglada obtenida es desarrollable.
 - (f) Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, estudiar si hay alguna generatriz a lo largo de la cual el plano tangente a la superficie es constante.

Nota: La superficie obtenida modeliza una de las esculturas de Richard Serra de la colección permanente del Museo Guggenheim.

4. Se consideran los siguientes arcos de circunferencia:

$$\begin{aligned} c_a(u) &= (\cos(au), \sin(au), 2), & u \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ d(u) &= (\cos(u), \sin(u), 0), & u \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Obtener una parametrización de la superficie reglada formada por rectas que se apoyan en dichos arcos de circunferencia.
- (b) Dibujar la superficie reglada obtenida.
- (c) Estudiar para qué valor del parámetro a la superficie reglada obtenida es desarrollable y analizar la superficie obtenida para dichos valores de a .
- (d) Para $a = 2$, estudiar si hay alguna generatriz a lo largo de la cual el plano tangente a la superficie es constante.

5. Se considera la superficie del ejercicio 4 de la sección 1. Se pide:

- (a) Comprobar que se obtiene la misma superficie si se considera que el vector $\vec{w}(u)$ forma ángulo $\pi - \beta$ con el vector tangente a la curva directriz.
- (b) Para $\beta = \pi/4$, comprobar que la superficie reglada satisface la ecuación: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- (c) Para $\beta = \pi/4$, obtener la línea de estricción.
- (d) Para $\beta = \pi/4$, obtener la generatriz que contiene al punto $P = (1, 0, 0)$.
- (e) Para $\beta = \pi/4$, calcular la curvatura total (o de Gauss) en los puntos de la recta del apartado anterior.

6. **Paraguas de Whitney** es la superficie parametrizada:

$$r(u, v) = (uv, v, u^2), \quad u \in [-1, 1], v \in [-1, 1].$$

Se pide:

- (a) Representar gráficamente (con MAPLE o Grasshopper) dicha superficie.
- (b) Estudiar si la superficie es alabeada o desarrollable.

7. **Conoide de Plücker** es la superficie parametrizada como sigue:

$$r_n(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), \cos(nu)), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [-1, 1],$$

siendo n un número natural. Se pide:

- (a) Representar gráficamente (con MAPLE o Grasshopper) dicha superficie para los valores $n = 1$, $n = 2$ y $n = 4$.
- (b) Estudiar si la superficie es alabeada o desarrollable.

8. Se considera la superficie generada por rectas contenidas en planos $x + y = a$, $a \in \mathbb{R}$, que se apoyan en la curva $y^2 = z^3$, $x = 0$ y en el eje OX . Se pide:

- (a) Obtener una representación paramétrica de la superficie.
- (b) Clasificar los puntos de la superficie y determinar las generatrices de puntos parabólicos de la misma.
- (c) Comprobar si en la parametrización obtenida la directriz coincide con la línea de estricción.
- (d) Parametrizar la superficie de manera que la curva directriz sea la línea de estricción.
- (e) Ecuación de la generatriz que contiene al punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- (f) Las curvaturas principales en P .
- (g) Las direcciones coordenadas, direcciones principales y direcciones asintóticas en P .

9. Se considera la superficie parametrizada

$$r(u, v) = (u + v, u^2 + v, v), \quad -1 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2.$$

Se pide:

- (a) Estudiar si la superficie es alabeada o desarrollable.
- (b) Ecuación del plano tangente en los puntos de la curva $r(0, v)$, $0 \leq v \leq 2$.
- (c) Curvaturas principales en un punto arbitrario de la superficie.
- (d) Direcciones coordenadas, direcciones principales y direcciones asintóticas en un punto arbitrario de la superficie.

10. Sea la superficie engendrada por las normales principales a la hélice

$$\gamma(u) = (2 \cos(u), 2 \sin(u), u), \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

- (a) Obtener una representación paramétrica regular de dicha superficie.
- (b) Estudiar si es desarrollable o alabeada.
- (c) Obtener, en su caso, su arista de retroceso o línea de estricción.
- (d) Hallar los puntos de la generatriz que contiene al punto $P = (0, 2, \frac{\pi}{2})$ y en los que el plano tangente es horizontal.
- (e) Obtener las direcciones principales en P .
- (f) Comprobar que la ecuación $\frac{y}{x} = \tan z$, es una representación cartesiana de la superficie.

11. Se considera la superficie parametrizada:

$$r(u, v) = (1 - v) c(u) + v d(u), \quad v \in [0, 1],$$

donde $c(u)$ y $d(u)$ son las curvas parametrizadas:

$$\begin{aligned} c(u) &= (0, \cos(u), \sin(u)), \quad u \in [0, \pi/2], \\ d(u) &= (1 + \cos(2u), \sin(2u), 0), \quad u \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Representar gráficamente (con MAPLE o Grasshopper) dicha superficie.
- (b) Clasificar los puntos de la superficie.
- (c) Estudiar si la superficie es alabeada o desarrollable.
- (d) Obtener las direcciones coordenadas, de curvatura principal y asintóticas en el punto $P = (0, 1, 0)$ expresándolas como vectores de $\mathbb{R}^3$.
- (e) Calcular las curvaturas principales en P .
- (f) Hallar la familia de direcciones asintóticas no rectilíneas de la superficie.