

APELLIDOS..... Grupo.....

NOMBRE..... Exp.....

Duración del examen: 2 horas y media.

No se permite el uso de calculadora.

1. (3 puntos) Se considera la curva $\mathcal{C}$ con parametrización

$$\alpha(t) = (t, e^t, e^{at}), \quad t \in [-1, 1],$$

y el punto $P = (0, 1, 1)$ de la curva. Se pide:

- (a) (0,5 puntos) Ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva en P . Determinar el valor del parámetro a para el cual la recta tangente a la curva en el punto P está contenida en el plano $z = 1$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} P &= \alpha(0) = (0, 1, 1), \\ \alpha'(t) &= (1, e^t, ae^{at}), \\ \alpha'(0) &= (1, 1, a). \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva en P son:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + at, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Para $a = 0$ la recta tangente está contenida en el plano $z = 1$.

- (b) (1 punto) Para $a = 1$, determinar la curvatura en P .

La curvatura en $P = \alpha(0)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\kappa(0) = \frac{\|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3}.$$

Para $a = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (1, e^t, ae^{at}), \\ \alpha''(t) &= (0, e^t, a^2e^{at}), \\ \alpha'(0) &= (1, 1, 1), \\ \alpha''(0) &= (0, 1, 1), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \alpha'(0) \wedge \alpha''(0) &= (0, -1, 1), \\ \|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)\| &= \sqrt{2}, \\ \|\alpha'(0)\| &= \sqrt{3}, \end{aligned}$$

y, por tanto, $\kappa(0) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

- (c) (1 punto) Definir circunferencia oscultriz de una curva en un punto de la misma. Para $a = 1$, determinar: el centro, radio y unas ecuaciones paramétricas de la circunferencia oscultriz de la curva en P .

Se tiene:

$$\begin{aligned} P &= \alpha(0) = (0, 1, 1), \\ \alpha'(0) &= (1, 1, 1), \\ \alpha''(0) &= (0, 1, 1), \\ t(0) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \\ b(0) &= \frac{\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)}{\|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1), \\ n(0) &= b(0) \wedge t(0) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}(-2, 1, 1), \\ \kappa(0) &= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Por tanto, el radio de la circunferencia oscultriz en P es: $\rho(0) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

El centro es:

$$\begin{aligned} Z &= P + \rho(0) n(0) \\ &= (0, 1, 1) + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}(-2, 1, 1) \\ &= (0, 1, 1) + \frac{3}{2}(-2, 1, 1) = \left(-3, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Y una parametrización de la circunferencia oscultriz en P es:

$$\begin{aligned} r(t) &= Z + \rho(0) (\cos(t)n(0) + \sin(t)t(0)) \\ &= \left(-3, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(\cos(t) \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}(-2, 1, 1) + \sin(t) \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right) \\ &= \left(-3 - 3\cos(t) + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(t), \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos(t) + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(t), \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos(t) + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(t) \right), \\ t &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

- (d) (0.5 puntos) Determinar los valores del parámetro a para los cuales la curva es plana.

La función torsión de la curva viene dada por la expresión:

$$\tau(t) = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

La curva es plana si y sólo si $\tau(t)$ es idénticamente nula; esto es, si y sólo si $[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)] = 0$ para todo valor de t .

Se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (1, e^t, ae^{at}), \\ \alpha''(t) &= (0, e^t, a^2e^{at}), \\ \alpha'''(t) &= (0, e^t, a^3e^{at}), \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} [\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)] &= \begin{vmatrix} 1 & e^t & ae^{at} \\ 0 & e^t & a^2e^{at} \\ 0 & e^t & a^3e^{at} \end{vmatrix} \\ &= a^2(a-1)e^{(a+1)t}. \end{aligned}$$

Por tanto, la curva es plana si y sólo si $a = 0$ ó $a = 1$.

2. (5 puntos) Se considera la superficie $\mathcal{S}$ con parametrización

$$r(u, v) = (\cos(u), \sin(u) + v^2, v), \quad u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-1, 2].$$

Se pide:

- (a) (0,5 puntos) La matriz de la primera forma fundamental de $\mathcal{S}$ en un punto genérico.

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= (-\sin(u), \cos(u), 0), \\ r_v(u, v) &= (0, 2v, 1), \end{aligned}$$

$$I_{r(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 2v \cos(u) \\ 2v \cos(u) & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}$$

- (b) (0,5 puntos) Obtener los puntos de la superficie en los que las líneas coordenadas son ortogonalmente.

Como $F(u, v) = 2v \cos(u)$, para los valores $v = 0$ y $u = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, $F(u, v) = 0$. Por tanto, las líneas coordenadas son ortogonales en los puntos de las siguientes curvas:

$$\begin{aligned} r(u, 0) &= (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in [0, 2\pi], \\ r\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &= (0, 1 + v^2, v), \quad v \in [-1, 2], \\ r\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) &= (0, -1 + v^2, v), \quad v \in [-1, 2]. \end{aligned}$$

- (c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman las curvas: $\gamma(t) = r(t, 1)$ y $\beta(t) = r(t - 1, t^2)$ en el punto $P = (1, 1, 1)$.

Se tiene: $P = \gamma(0) = \beta(1) = r(0, 1)$ y

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= 1 \cdot r_u(t, 1) + 0 \cdot r_v(t, 1), \\ \beta'(t) &= 1 \cdot r_u(t, t^2) + 2t \cdot r_v(t, t^2), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= r_u(0, 1), \\ \beta'(1) &= 1 \cdot r_u(0, 1) + 2 \cdot r_v(0, 1). \end{aligned}$$

La matriz de la primera forma fundamental en P es:

$$I_{r(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\cos \left(\widehat{\gamma'(0), \beta'(1)} \right) = \frac{{}^{(1,0)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{{}^{(1,0)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \sqrt{{}^{(1,2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}} = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

- (d) (0,5 puntos) Vector normal a la superficie en un punto genérico.

Se tiene:

$$\begin{aligned}
r_u(u, v) \wedge r_v(u, v) &= (\cos(u), \sin(u), -2v \sin(u)), \\
\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\| &= \sqrt{1 + 4v^2 \sin^2(u)}, \\
N(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4v^2 \sin^2(u)}} (\cos(u), \sin(u), -2v \sin(u)).
\end{aligned}$$

- (e) (0,5 puntos) La matriz de la segunda forma fundamental
- $\mathcal{S}$
- en un punto genérico.

Se tiene:

$$\begin{aligned}
r_{uu}(u, v) &= (-\cos(u), -\sin(u), 0), \\
r_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\
r_{vv}(u, v) &= (0, 2, 0),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
r_{uu}(u, v) \cdot N(u, v) &= \frac{-1}{\sqrt{1 + 4v^2 \sin^2(u)}}, \\
r_{uv}(u, v) \cdot N(u, v) &= 0, \\
r_{vv}(u, v) \cdot N(u, v) &= \frac{2 \sin(u)}{\sqrt{1 + 4v^2 \sin^2(u)}},
\end{aligned}$$

Luego

$$II_{r(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4v^2 \sin^2(u)}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \sin(u) \end{pmatrix}.$$

- (f) (1 punto) Calcular la curvatura total en un punto arbitrario. Clasificar los puntos de la superficie.

La curvatura total en un punto arbitrario es:

$$k_G(u, v) = \frac{\det(II_{r(u,v)})}{\det(I_{r(u,v)})} = \frac{-2 \sin(u)}{(1 + 4v^2 \sin^2(u))^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
P &= r(u, v) \text{ es parabólico si y sólo si } u = -\pi, 0, \pi, \\
P &= r(u, v) \text{ es elíptico si y sólo si } u \in (-\pi, 0), \\
P &= r(u, v) \text{ es hiperbólico si y sólo si } u \in (0, \pi).
\end{aligned}$$

- (g) (1 punto) Hallar las direcciones principales en el punto
- $P = (1, 1, 1)$
- expresadas como vectores en
- $\mathbb{R}^3$
- .

En P la matriz de la segunda forma fundamental es:

$$II_{r(0,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las direcciones principales (h, k) en el plano tangente a la superficie en P satisfacen:

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} k^2 & -hk & h^2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \iff h(2h + 5k) = 0 \\
&\iff h = 0 \text{ ó } 2h + 5k = 0.
\end{aligned}$$

Las direcciones principales en el punto P expresadas como vectores en $\mathbb{R}^3$ son:

$$\begin{aligned}r_u(u, v) &= (-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 0), \\r_v(u, v) &= (0, 2v, 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= r_v(0, 1) = (0, 2, 1), \\ \vec{w}_2 &= 5r_u(0, 1) - 2r_v(0, 1) = (0, 5, 0) - (0, 4, 2) = (0, 1, -2).\end{aligned}$$

Y las curvaturas principales en P son:

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{(0, 1)II_P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(0, 1)I_P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(0, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = 0, \\ k_2 &= \frac{(5, -2)II_P \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}}{(5, -2)I_P \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}} = \frac{(5, -2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}}{(5, -2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}} = \frac{-25}{5} = -5.\end{aligned}$$

- (h) (0,5 puntos) Clasificar el punto P . Definir dirección asintótica y determinar las direcciones asintóticas en P .

El punto P es parabólico pues una de sus curvaturas principales es cero.

Una dirección del plano tangente a la superficie en un punto P es asintótica si la curvatura en dicha dirección es nula.

En P hay una única dirección asintótica que es la dirección del vector

$$\vec{w}_1 = r_v(0, 1) = (0, 2, 1).$$

3. (2 puntos) Se considera la superficie $\mathcal{S}$ con parametrización:

$$r(u, v) = (1-v)\alpha(u) + v\beta(u), \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

con $\alpha(u) = (u, 0, \cos(u))$ y $\beta(u) = (u, 3, \sin(u))$.

Se pide:

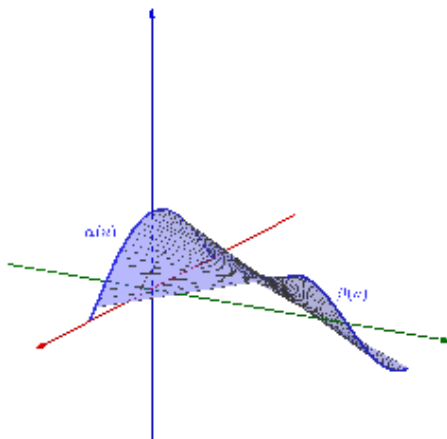
(a) (0,5 puntos) ¿Es $\mathcal{S}$ una superficie reglada? Justificar la respuesta. Representar gráficamente las curvas $\alpha(u)$ y $\beta(u)$ y hacer un esbozo de la superficie.

La superficie $\mathcal{S}$ admite la siguiente parametrización como superficie reglada:

$$r(u, v) = \alpha(u) + v\vec{w}(u), \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

siendo $\vec{w}(u) = \overrightarrow{\beta(u)\alpha(u)}$ los vectores directores de las generatrices de la superficie. Es una superficie reglada generada por las rectas $u = u_0$, con $u_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; esto es,

$$r(u_0, v) = (u_0, 0, \cos(u_0)) + v(0, 3, \sin(u_0) - \cos(u_0)), \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$



(b) (0,5 puntos) El parámetro de distribución.

$$p(u) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sin(u) \\ 0 & 3 & \sin(u) - \cos(u) \\ 0 & 0 & \cos(u) + \sin(u) \end{vmatrix} = 3(\cos(u) + \sin(u)).$$

(c) (0,5 puntos) Estudiar si la superficie es desarrollable.

Como el parámetro de distribución no es idénticamente nulo la superficie no es desarrollable.

(d) (0,5 puntos) Determinar las generatrices a lo largo de las cuales el plano tangente no varía.

Las generatrices que satisfacen la condición del enunciado son las de puntos parabólicos; esto es, $p(u) = 0$. En este caso,

$$p(u) = \cos(u) + \sin(u) = 0 \iff u = -\frac{\pi}{4}.$$

La generatriz pedida es:

$$r(-\frac{\pi}{4}, v) = \left(u, 3v, \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}v\right), \quad 0 \leq v \leq 1.$$