

Hoja 1

1. Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z, t) \mid 2x + z = 0\}, & B &= \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, z - t = 0\}, \\ C &= \{(x, y, z, t) \mid 2x + y = 3\}, & D &= \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0 \text{ ó } z - t = 0\}, \\ E &= \{(x, y, z, t) \mid t \leq 0\}, & F &= \{(x, y, z, t) \mid xy = 0\}. \end{aligned}$$

2. Estudiar para qué valores de a el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a, 2y + z = 0, x + 2y + z = a\}.$$

3. Estudiar si el sistema de vectores $\{(1, -1, 2), (-1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.
4. Encontrar un sistema de generadores de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z, t) \mid 3x - z = 0\}, \\ B &= \{(x, y, z, t) \mid x - y = 0, z + t = 0\}, \\ C &= \{(x, y, z, t) \mid x = y, z = 2t, x + t = 0\}. \end{aligned}$$

5. ¿Es el vector $(1, 2, 3)$ combinación lineal de los vectores del sistema $S = \{(1, 0, 2), (0, 2, 2)\}$? ¿Y el vector $(1, 1, 1)$?
6. Estudiar si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes:
- (a) $(1, 2), (2, 3), (5, 8)$
 - (b) $(1, 2, 3), (2, 0, -1), (0, 4, 7)$
 - (c) $(1, 2, 1), (3, 1, 1), (1, 0, -1)$
 - (d) $(1, -2, 1, 1), (3, 0, 2, -2), (0, 4, -1, 1)$
 - (e) $(1, 2, 3, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (0, 2, 3, 1)$.

7. Encontrar una base de los siguientes subespacios vectoriales y determinar la dimensión de dichos subespacios:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z, t) \mid 3x - z = 0\}, \\ B &= \{(x, y, z, t) \mid x - y = 0, z + t = 0\}, \\ C &= \{(x, y, z, t) \mid x = y, z = 2t, x + t = 0\}, \\ D &= \{(x, y, z) \mid x - 2z = 0\}, \\ E &= \{(x, y, z) \mid x - y = 0, x + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

8. Se considera el sistema de vectores $B = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{u}_2 = (1, 1, -1, -1), \vec{u}_3 = (1, -1, 1, -1), \vec{u}_4 = (1, -1, -1, 1)\}$. Se pide:

- (a) Escribir $\vec{v} = (1, -3, 5, 6)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.
- (b) Hallar las coordenadas de un vector arbitrario $\vec{v} = (a, b, c, d)$ en la base B .

9. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z, t) \mid x + y - z = 0\} \\ V_2 &= \mathcal{L}(\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}) \\ V_3 &= \mathcal{L}(\{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}) \end{aligned}$$

¿Pertenece el vector $(1, 0, 1, -2)$ a V_1 ? ¿Y a V_2 ? ¿Y a V_3 ? En caso afirmativo calcular las coordenadas de dicho vector con respecto a alguna base. (La elección de dicha base se deja al alumno).

10. Se consideran las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{\vec{u}_1 = (1, 2), \vec{u}_2 = (2, 3)\}$ y $B' = \{\vec{v}_1 = (1, 3), \vec{v}_2 = (1, 4)\}$. Hallar las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B' .

11. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subconjuntos:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \\ W_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0, 3x + 2y - 2z = 0\}. \end{aligned}$$

- (a) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Hallar los subespacios vectoriales: $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$. ¿Es $W_1 + W_2$ suma directa?

12. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 2z + t = 0\}$ y $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t, y = 2z\}$.

- (a) Hallar una base de U y determinar la dimensión de U .
- (b) Hallar una base de V y determinar la dimensión de V .
- (c) Hallar los subespacios $U \cap V$ y $U + V$ y dar una base de cada uno de ellos.

13. Sea $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z + t = 0\}$ y sea L el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$. Se pide:

- (a) Probar que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Calcular una base y la dimensión de H .

(b) Calcular una base de $H \cap L$ y otra de $H + L$.

14. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0\} \\ V_2 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + 3z = 0, y + z = 0\} \\ V_3 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + z = 0\} \end{aligned}$$

calcular los subespacios: $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_3$, $V_2 \cap V_3$, $V_1 \cap V_2 \cap V_3$, $V_1 + V_2$, $V_1 + V_3$, $V_2 + V_3$ y $V_1 + V_2 + V_3$. Decir cuál de las sumas anteriores es suma directa.

15. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ referido a la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, se considera el subespacio vectorial S generado por los vectores $\vec{u} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$ y $\vec{v} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, y el subespacio vectorial H de ecuaciones cartesianas $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$. Se pide:

- (a) Obtener las ecuaciones paramétricas y cartesianas de S . Obtener una base para H y las ecuaciones paramétricas de H asociadas a dicha base.
- (b) Obtener una base para los subespacios $S + H$ y $S \cap H$. ¿Es $S + H$ suma directa? Razonar la respuesta.

16. Estudiar, razonando las respuestas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- (a) Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por el siguiente conjunto de vectores:

$$G = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, -1)\}.$$

Entonces $W = \mathbb{R}^3$.

- (b) El conjunto $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0, x - y + z = 0, x - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 1.
- (c) Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ cuatro vectores no nulos y distintos entre sí. Sea W el subespacio generado por esos cuatro vectores. Entonces se verifica que $W = \mathbb{R}^3$.
- (d) Sea W el subespacio vectorial generado por tres vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^4$ y sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ y $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_3$. Entonces se verifica que $\dim W \leq 2$.

17. Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores linealmente dependientes de un espacio vectorial V .

- (a) ¿Se puede asegurar que $\vec{u}$ depende linealmente de los otros dos vectores?
- (b) ¿Se puede asegurar que uno de los tres vectores es combinación lineal de los otros dos?

Razona las respuestas.

18. Sean $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ vectores linealmente independientes. Estudiar si $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ son linealmente independientes o no.
19. Probar que todo espacio vectorial finitamente generado, posee al menos una base.
20. En un espacio vectorial V se consideran dos subespacios vectoriales S y H . ¿Puede ser $S \cap H = \emptyset$? Razonar la respuesta.
21. Sean B y B' bases de un espacio vectorial V . ¿Qué relación hay entre la matriz del cambio de base de B' a B y la matriz del cambio de base de B a B' ? Razona la respuesta.
22. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial real V .
¿Es, en general, $W_1 \cup W_2$ un subespacio vectorial de V ? En caso afirmativo, demuéstalo. En caso contrario, da un contraejemplo.
23. Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ (es decir, el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales), se considera el conjunto $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$. ¿Es S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$? Razonar la respuesta.
24. Estudiar si el sistema de polinomios $\{1 - x, 3 - x^2, x\}$ genera $\mathbb{R}_2[x]$.
25. Estudiar si los polinomios $x, x^2 - 2x, x^3 - x$ de $\mathbb{R}_3[x]$ son linealmente dependientes o independientes.
26. Sea $\mathcal{M}_{3 \times 2}$ el conjunto de matrices de orden 3×2 con coeficientes reales. Probar que $\mathcal{M}_{3 \times 2}$ es un espacio vectorial con las operaciones: suma de matrices y producto de una matriz por un número real.
27. Dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_2$ formado por las matrices reales cuadradas de orden dos, se considera el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \text{ tales que } a + b = cd \right\}.$$

¿Es S un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$? Razonar la respuesta.

28. Dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_3$ formado por las matrices reales cuadradas de orden tres, se considera el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid \text{con } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

¿Es S un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_3$? Razonar la respuesta.

29. Hallar el subespacio vectorial $S \subset \mathcal{M}_2$, engendrado por las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

30. Se considera el conjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \mid a + b - c = 0, d - a = 0 \right\}.$$

- (a) Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$.
 - (b) Determina unas ecuaciones paramétricas, una base y la dimensión de W .
 - (c) Halla una base de un subespacio vectorial W' de $\mathcal{M}_2$ tal que $W \oplus W' = \mathcal{M}_2$.
31. Demuestra que las coordenadas de un vector respecto de una base dada, son únicas.

32. Se considera el espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Comprobar que el sistema de vectores

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de V .

- (b) Se consideran los siguientes subconjuntos de V :

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \text{con } a - b + 2c = 0 \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \text{con } a = 0, b = 2\alpha, c = \alpha \right\} \end{aligned}$$

Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V .

- (c) Caracteriza a través de sus ecuaciones cartesianas, ecuaciones paramétricas, base y dimensión los subespacios suma e intersección de W_1 y W_2 . ¿Es $W_1 + W_2$ suma directa?