

Matemáticas I: Hoja 2

1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y sea $h_m: V \rightarrow V$ el endomorfismo que respecto de la base canónica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tiene por expresión matricial la siguiente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (a) Calcular los valores de m para los cuales h_m es automorfismo (esto es, h_m es una aplicación lineal biyectiva).
 - (b) Para $m = -3/2$, determinar las ecuaciones paramétricas y la dimensión de $\ker(h_m)$ e $\text{Im}(h_m)$.
 - (c) Para $m = -3/2$, representar en una misma gráfica $\ker(h_m)$ e $\text{Im}(h_m)$.
2. Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales reales.
- (a) Demuestra que f es inyectiva si y sólo si $\ker(f) = \{\vec{0}_V\}$.
 - (b) Si la dimensión de $\text{Im}(f) = \dim(V) - 2$, ¿cuál es la dimensión de $\ker(f)$? ¿Es f un isomorfismo? Razona tu respuesta.
3. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que verifica
- $$f(1, 1, 1) = (1, 0, 1, 0), \quad f(1, 1, 0) = (3, 1, 0, 0), \quad f(1, 0, 0) = (2, 1, 0, 0)$$
- (a) Escribir la expresión matricial de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Obtener bases de $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$.
 - (c) ¿Es f una aplicación inyectiva? Razona la respuesta.
 - (d) ¿Es f una aplicación sobreyectiva? Razona la respuesta.
4. Se consideran los espacios vectoriales $\mathcal{M}_2$ y $\mathbb{R}_2[x]$ y sus respectivas bases canónicas:

$$B_{\mathcal{M}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}.$$

Se define la aplicación lineal $f: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $m \in \mathbb{R}$, como sigue:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= 2 + x + 2x^2, & f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= 2 + 2x, \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 4 + 3x + 6x^2, & f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 4 + 2x + 6x^2. \end{aligned}$$

Se pide:

- La expresión matricial de f respecto de las bases $B_{\mathcal{M}_2}$ y $B_{\mathbb{R}_2[x]}$.
- La imagen del subespacio vectorial

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \mid a + d = 0, b = 0 \right\}$$

mediante f .

- Comprobar que $B'_{\mathcal{M}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{M}_2$ y hallar la matriz de f respecto de las bases $B'_{\mathcal{M}_2}$ y $B_{\mathbb{R}_2[x]}$.

- En el espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con $n \in \mathbb{N}$, se define la aplicación

$$\begin{aligned} h: \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto h(A) = \frac{A + A^t}{2} \end{aligned}$$

donde A^t es la matriz transpuesta de A .

- Probar si h es o no una aplicación lineal.
 - Hallar el núcleo de h y la imagen de h .
- Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales, de tal forma que la $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim V$. ¿Puede ser f una aplicación inyectiva?, ¿sobreyectiva?, ¿sobreyectiva y no inyectiva? y ¿biyectiva? Razonar en cada caso la respuesta.
 - Sea $\mathfrak{S}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de orden 2 simétricas y sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2. Se define la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f: \mathfrak{S}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} &\longmapsto c + ax - cx^2. \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Obtener la expresión matricial de f en las bases canónicas.
- (b) Hallar la dimensión del núcleo y de la imagen de f . ¿Es f inyectiva?
- (c) ¿Pertenece el polinomio $p(x) = x^2 - 1$ a la $\text{Im}(f)$? Razonar la respuesta. En caso afirmativo hallar la preimagen del polinomio p .
- (d) Dado el subespacio vectorial $S \subset \mathfrak{S}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, engendrado por las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar la imagen de S .

8. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de las bases $B_{\mathbb{R}^2} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $B_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3, \\ f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) &= 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \end{aligned}$$

y sea $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya expresión matricial en la base canónica $B_{\mathbb{R}^3}$ es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Escribe la expresión matricial de f en las bases $B_{\mathbb{R}^2}$ y $B_{\mathbb{R}^3}$.
 - (b) Halla las ecuaciones cartesianas de $\text{Im}(g)$.
 - (c) Indica la $\dim \ker g$, la $\dim \text{Im } g$ y clasifica la aplicación g .
 - (d) Calcula el vector $\vec{v} = (g \circ f)(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.
 - (e) Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de los vectores cuya imagen mediante g es $\vec{v}$.
 - i. ¿Es S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Razona la respuesta.
 - ii. ¿Cuántos elementos tiene S ? Utiliza el teorema de Rouché-Fröbenius para argumentar tu respuesta.
9. Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Demuestra que si el sistema de vectores de W , $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ es linealmente independiente entonces el sistema $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es linealmente independiente.
10. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ tiene la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Obtener las matrices de cambio de base de $B'_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 2), (1, -1)\}$ a $B_{\mathbb{R}^2}$ y de $B_{\mathbb{R}^2}$ a $B'_{\mathbb{R}^2}$.
 - (b) Obtener la expresión matricial de f en las bases $B'_{\mathbb{R}^2}$ y $B_{\mathbb{R}^3}$.
 - (c) Clasificar f .
 - (d) ¿Pertenece el vector $\vec{u}_1 = (4, 1, 1)$ a $\text{Im}(f)$? Razona tu respuesta.
11. Sea g un endomorfismo inyectivo de un espacio vectorial V . Determinar el subespacio $\text{Im}(g)$. ¿Es g una aplicación biyectiva?
12. Sea $\mathcal{M}_2$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, sea B la base canónica de $\mathcal{M}_2$ y sea B' la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se considera la aplicación lineal dada por:

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = (x + z, t, x + z - t),$$

y el endomorfismo g de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\begin{aligned} g(1, 1, 0) &= (0, 0, 0), \\ g(0, 1, 1) &= (1, 1, 0), \\ g(0, 0, 1) &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Obtener $M_{BB'}(f)$.
- (b) Obtener $M_{B'B'}(g)$.
- (c) Obtener $M_{BB'}(g \circ f)$.
- (d) ¿Es $g \circ f$ un inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Razona la respuesta.
- (e) Hallar el conjunto de matrices de $\mathcal{M}_2$ tales que su imagen por f es el vector $(1, 2, 3)$ ¿Es dicho conjunto un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$?