

Geometría.

1. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que:

$$f(1, 0, 0) = (3, -2, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (4, -3, 2)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

- (a) Calcular los autovalores de f y los subespacios propios de f .
 - (b) ¿Es f diagonalizable?
 - (c) Calcular $\ker f$ y $\operatorname{Im} f$.
2. Calcular los autovalores de los siguientes endomorfismos y los subespacios propios asociados a cada autovalor:
- (a) $f(x, y, z) = (x - y + 3z, 2y + z, 2z)$
 - (b) $f(x, y, z) = (x, x + 2y + z, -x - y)$
 - (c) $f(x, y, z) = (x, x + 2y, x + y + 5z)$
3. Hallar el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que el vector $(0, 1/2, 0)$ es un autovector de f asociado al autovalor 1 y $W = \{(x, y, z) \mid x + y - 2z = 0\}$ es el subespacio propio al autovalor 3.
4. El subespacio vectorial asociado al autovalor negativo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es

- (a) $L = \{(k, 0, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$
 - (b) $L = \{(k, k, 2k) \mid k \in \mathbb{R}\}$
 - (c) $L = \{(0, -2k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$
5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada al endomorfismo f respecto de las bases canónicas.

- (a) ¿Es el vector $(0, 0, 0, 3, 0)$ un autovector de f asociado al autovalor 4?
 - (b) ¿Es el vector $(0, 0, 0, 0, 5)$ un autovector de f asociado al autovalor 3?
 - (c) Calcular los autovalores de f y los subespacios propios asociados a cada autovalor.
 - (d) ¿Es f diagonalizable?
6. Dado el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y - 2z, x + 2y + bz, ax - 2y)$, hallar los valores de los parámetros a y b para que $(1, 1, 1)$ sea un autovector de f .
7. Demostrar la siguiente afirmación: Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que $\lambda = 0$ es un autovalor de A . Entonces, el sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado.
8. Razonar son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- (a) Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ y sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$A\vec{u} = \vec{0} \text{ y } (A - I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Entonces, se verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes.

- (b) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|A| = 0$, $tr(A) = 1$ y $\lambda = 1$ es un autovalor de A . Entonces el subespacio vectorial

$$V(1) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 / A\vec{v} = \vec{v}\}$$

tiene dimensión 1.

- (c) Sea A una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = -1$, entonces A es diagonalizable.

9. Estudiar para qué valores de los parámetros a y b son diagonalizables las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por: $f(x, y, z) = (mx, 4y + 4z, y + z)$ donde m es un parámetro real. Se pide:

- (a) Estudiar para qué valores del parámetro m es f diagonalizable.

- (b) Para $m = 0$ obtener, si es posible, una matriz P no singular y D diagonal para las que se verifica que $M_{B_c}(f) = PDP^{-1}$.
11. Sea el endomorfismo $f(x, y, z) = (ax + 3y + 4z, 3x + ay, 4x + az)$ donde a un parámetro real. Se pide:
- (a) Estudiar para qué valores del parámetro a es f diagonalizable.
- (b) Para $a = 0$ estudiar si f es diagonalizable y obtener, si es posible, las matrices P y D para las que se verifica que: $M_{B_C}(f) = PDP^{-1}$.

12. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & a & b \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Estudiar para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz A .
- (b) Para $b = 0$, estudiar en función del parámetro a si los vectores $(2, 0, 2)$ y $(1, 3, 1)$ son autovectores de A .
- (c) Para $a = 3$, $b = 0$, hallar una matriz P no singular y una matriz D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$.
13. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Estudiar para qué valores de los parámetros a y b , dicha matriz es diagonalizable.
- (b) Para los valores de los parámetros $a = 3$ y $b = 2$, calcular una matriz P no singular y una matriz D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$.