

Matemáticas I: Hoja 6

1. Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de V . Sea W un subespacio de V de ecuación cartesiana $x - 2y + z = 0$ y sea $f: V \times V \longrightarrow V$ la forma bilineal simétrica cuya matriz asociada respecto de la base B es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (a) Determinar para qué valores del parámetro α es f un producto escalar.
 - (b) Para $\alpha = 3$, determinar una base ortogonal de W y una base del complemento ortogonal de W .
 - (c) Para $\alpha = 3$, calcular una base de B_1 de V respecto de la cual la matriz del producto escalar sea diagonal. Determinar dicha matriz diagonal.
2. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (a) ¿Es f una isometría vectorial?
 - (b) Hallar los autovalores de f y los subespacios invariantes de f .
 - (c) Clasificar la isometría f .
3. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (a) ¿Es f una isometría vectorial?
- (b) Hallar la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(c) Hallar los autovalores de f , $\det A$ y los subespacios invariantes de f .

4. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y se $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base ortonormal. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) &= -\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{4}{3}\vec{e}_3, \\ f(\vec{e}_2) &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3, \\ f(\vec{e}_3) &= \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Probar que f es una isometría vectorial.
- (b) Calcular los subespacios invariantes de f .
- (c) Clasificar la isometría f .
- (d) Hallar la expresión analítica f^{-1} .

5. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se consideran las aplicaciones lineales $g, f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas como sigue:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1 - \sqrt{3}\vec{e}_3) &= -2\vec{e}_3, & g(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1, \\ f(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2, & g(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_2, \\ f(\sqrt{3}\vec{e}_1 + \sqrt{3}\vec{e}_3) &= 2\vec{e}_1, & g(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3, \end{aligned}$$

se pide:

- (a) Probar que f es una isometría vectorial y clasificarla.
- (b) Hallar los subespacios invariantes de f .
- (c) Probar que g es una isometría vectorial y clasificarla.
- (d) Hallar los subespacios invariantes de g .
- (e) Hallar $f \circ g$. ¿Es $f \circ g$ una isometría ortogonal? Clasificarla.
- (f) Hallar los subespacios invariantes de $f \circ g$.

6. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como sigue:

$$\begin{aligned} f(1, 1, 0) &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \\ f(0, 1, 1) &= \left(1, 0, \frac{4}{3}\right), \\ f(0, 0, 1) &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Probar que f es una isometría vectorial.
- (b) Clasificarla.
- (c) Hallar los subespacios invariantes de f .

7. Sea f la isometría tal que la recta r generada por el vector $(2, 1, 1)$ es el subespacio de vectores invariantes, el plano $\pi \equiv 2x + y + z = 0$ es un plano invariante y $f(1, 0, -2) = (1, -2, 0)$ y $f(1, -2, 0) = (-1, 0, 2)$. Se pide:

- (a) Hallar los subespacios invariantes de f .
- (b) Dar la expresión analítica de f .
- (c) Clasificar dicha isometría.
- (d) Se considera el conjunto

$$S = \{\vec{x} \in \pi \mid \|\vec{x}\| = 1\}$$

¿Es S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Hallar $f(S)$.

- (e) Hallar la expresión analítica de $f^2 = f \circ f$.
- (f) ¿Es f^2 una isometría vectorial? Clasificarla.
- (g) Hallar los subespacios invariantes de f^2 .

8. Sea el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que:

- (a) El vector $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ es un autovector de f asociado al autovalor $\lambda = -1$.
- (b) El subespacio vectorial $W = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$ es el subespacio asociado al autovalor $\lambda = 1$.

Se pide:

- (a) Matriz de f respecto de la base B .
- (b) ¿Es f biyectiva? En caso afirmativo, calcula f^{-1} .
- (c) ¿Es f una transformación ortogonal? Demuestra que $\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\|$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.