

MATEMATICAS con MAPLE

Práctica

1. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ con base B . Sea $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal tal que:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3 + 2x_4y_4,$$

donde (x_1, x_2, x_3, x_4) (resp. (y_1, y_2, y_3, y_4)) son las coordenadas del vector $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) en la base B . Se pide:

- (a) Hallar la forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ asociada a f (NOTA: $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{v})$).
- (b) Hallar la matriz asociada a ω .
- (c) Hallar el rango y la signatura de ω .
- (d) Clasificar la forma cuadrática ω .

SOLUCIÓN:

La matriz asociada a f es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por tanto la forma cuadrática asociada a f es:

`>evalm([x1,x2,x3,x4]&*A[x1,x2,x3,x4]);`

$$\begin{aligned} \omega(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 \end{aligned}$$

donde (x_1, x_2, x_3, x_4) son las coordenadas del vector $\vec{u}$ en la base B .

Los autovalores de A son:

`>eigenvalues(A);`

$$3, 0, 1, 2$$

Por tanto el rango de ω es 3 y la signatura también es 3 (pues tiene tres autovalores positivos). La forma cuadrática ω es semidefinida positiva.

2. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ con base B . Sea $\omega: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática cuya expresión en cierta base B de V es:

$$\omega(\vec{u}) = 2(x_1)^2 + 2x_1x_2 + (x_2)^2 + 2x_1x_3 + (x_3)^2 + 2x_2x_4 + 2(x_4)^2,$$

donde (x_1, x_2, x_3, x_4) son las coordenadas del vector $\vec{u}$ en la base B . Se pide:

- (a) Hallar la matriz asociada a ω .
- (b) Hallar el rango y la signatura de ω .
- (c) Clasificar la forma cuadrática ω .

SOLUCIÓN:

La matriz asociada a ω es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

>eigenvalues(A);

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{7-2\sqrt{5}} + \frac{3}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7-2\sqrt{5}}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+7} + \frac{3}{2}, \\ \lambda_4 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+7}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_3 > 0$ y $\lambda_4 < 0$ la forma cuadrática es indefinida.