

1 Funciones reales de una variable real

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.

1.1 Continuidad

Definición. La función f es *continua en* $a \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Nótese que para que la condición anterior se cumpla tienen que existir $f(a)$ y el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a . Si no existe $f(a)$ y sí existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, la función f puede prolongarse por continuidad a $x = a$.

Ejemplo 1. La función $f(x) = \sin(1/x)$ no es continua en 0 porque no está definida en 0. Podemos definir una nueva función $g(x)$ poniendo

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

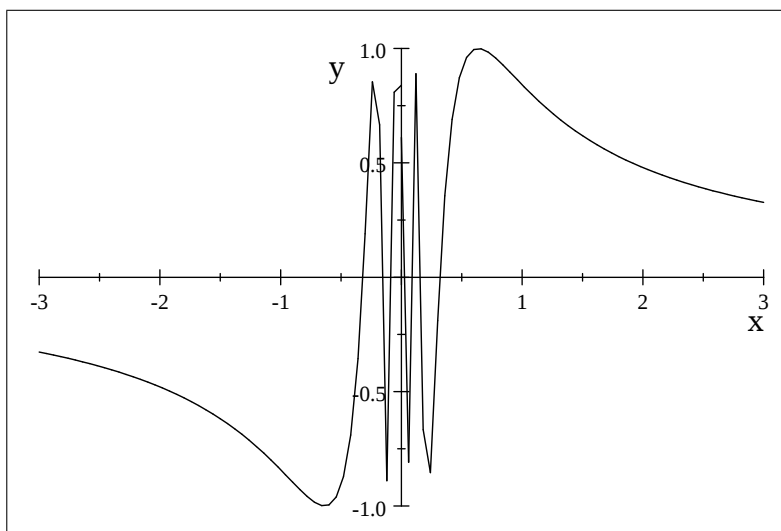
Si queremos que g sea una función continua entonces la constante k tiene que tomar el siguiente valor:

$$k = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

En este caso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

no existe porque para valores de x próximos a 0 la función $\sin(1/x)$ va recorriendo todos los posibles valores entre -1 y 1 (véase la siguiente figura). Por tanto no podemos extender la función $f(x) = \sin(1/x)$ de manera continua a $x = 0$.



Ejemplo 2. La función $f(x) = x \sin(1/x)$ no es continua en 0 porque no está definida en 0. Como en el ejemplo anterior, podemos definir una nueva función $g(x)$ poniendo

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

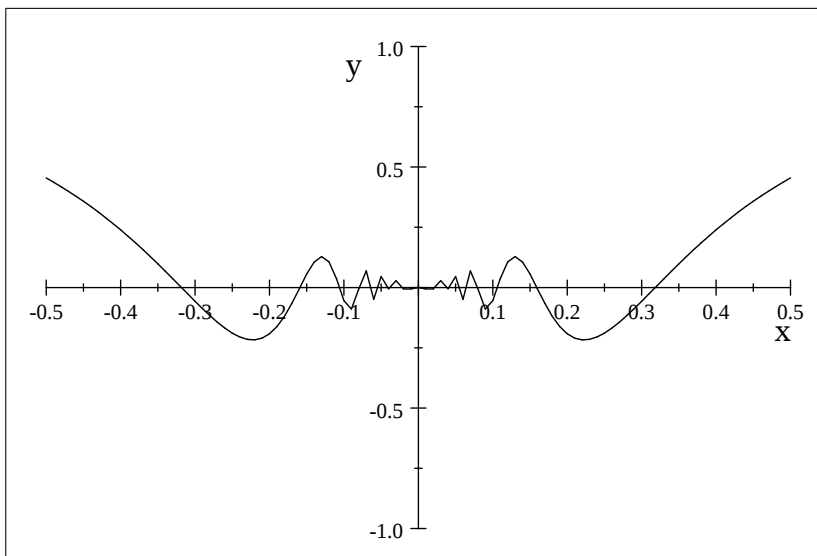
Si queremos que g sea una función continua entonces la constante k tiene que tomar el siguiente valor:

$$k = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ está acotada (esto es, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$) y x tiende a 0, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Por tanto, tomando $k = 0$ la función $g(x)$ es continua en $x = 0$ (véase la siguiente figura).



1.2 Derivabilidad

Definición. La función f es *derivable en* $a \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe.}$$

En este caso el límite se denota $f'(a)$ y recibe el nombre de *derivada de f en a* .

Nótese que la condición anterior también se puede escribir como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{|x - a|} \text{ existe.}$$

Teorema. Si f es derivable en a , entonces f es continua en a .

Demostración. Sabemos que f es continua en a si cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ ó equivalentemente si } \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0.$$

Veamos que si f es derivable en a entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$. Como f es derivable en a sabemos:

$$\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = \epsilon(h) \quad \text{con} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} (h\epsilon(h) + hf'(a)) = 0.$$

Por tanto, f es continua en a .

Ejemplo 3. Vamos a estudiar si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable.

Solución. Si $x \neq 0$ tenemos

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

En $x = 0$ tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

y dicho límite no existe pues $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ va oscilando muy rápidamente entre -1 y 1 cuando nos aproximamos a 0 . Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

Ejemplo 4. Vamos a estudiar si la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es derivable.

Solución. La función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es continua en su dominio de definición: $\text{dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Tenemos:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

que está definida en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Por tanto, sólo podemos calcular la derivada de f en $x = -1$ cuando nos aproximamos por la izquierda a -1 y la derivada de f en $x = 1$ cuando nos aproximamos por la derecha a 1 .

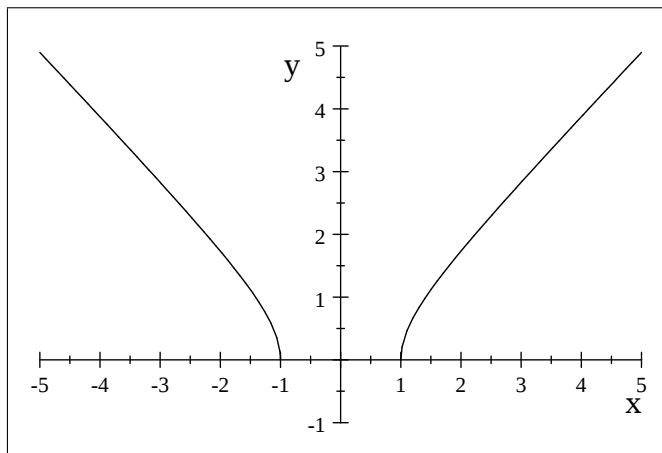
En $x = -1$ tenemos:

$$\lim_{h^- \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h^- \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+h)^2 - 1}}{h} = \lim_{h^- \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + 2h}}{h} = \lim_{h^- \rightarrow 0} \frac{|h|\sqrt{h+2}}{h} = -\sqrt{2},$$

y en $x = 1$ tenemos:

$$\lim_{h^+ \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h^+ \rightarrow 0} \frac{|h|\sqrt{h+2}}{h} = \sqrt{2}.$$

Luego $f'(-1) = -\sqrt{2}$ y $f'(1) = \sqrt{2}$. (Véase la siguiente figura)



Ejemplo 5. Pruébese que la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 y no es derivable en 0.

1.3 Diferencial

Definición. Dada una función f derivable en un punto a , se llama *diferencial de f en a* a la aplicación lineal

$$\begin{aligned} df(a): \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(a)x \end{aligned}$$

Si f es derivable en a , la diferencial nos sirve para aproximar el cambio de f cuando hacemos un cambio en la x pues

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \implies f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

por tanto, tenemos

$$df(a)(h) = f'(a)h \approx f(a+h) - f(a).$$

La diferencial de una función f en un punto a es la aplicación lineal que mejor aproxima a $f(x) - f(a)$ en puntos x próximos a a .

1.4 Recta tangente

Definición. La recta tangente a la gráfica de f en el punto a es la recta que mejor aproxima a la gráfica de f en un entorno del punto $(a, f(a))$.

Un punto (x, y) está contenido en la recta tangente si satisface la siguiente ecuación:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)} \quad \underline{\text{Ecuación de la recta tangente de } f \text{ en } a}$$

Ejemplo 5. Hallar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ en el punto $x = 1$. Dar un valor aproximado de $f(0.9)$.

Solución. Como $f'(x) = 3x^2 + 6x$ tenemos $f'(1) = 9$, la ecuación de la recta tangente a f en $x = 1$ es:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) \iff y = 2 + 9(x - 1).$$

Como el punto $x = 0.9$ está próximo a $x = 1$ podemos aproximar $f(0.9)$ utilizando la diferencial de f en $x = 1$. Tenemos:

$$f(0.9) \approx f(1) + df(1)(0.9 - 1) = f(1) + f'(1)(-0.1) = 2 - 0.9 = 1.1$$

1.5 Polinomio de Taylor

Objetivo: Aproximar funciones mediante polinomios.

Definición. El polinomio de Taylor de f en a de orden k lo denotaremos $T_a^k f(x)$ (o simplemente $p(x)$) es el polinomio que mejor aproxima f en puntos próximos a a . Esto es, es el único polinomio tal que:

$$f'(a) = p'(a), \quad f''(a) = p''(a), \dots, f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a).$$

La expresión del polinomio de Taylor de orden k en el punto a es:

$$T_a^k f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k,$$

donde $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Ejemplo 6. Hallar el polinomio de Taylor de orden 5 de $f(x) = \sin(x)$ en $x = 0$.

Solución. Tenemos:

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x), \quad f^{(5)}(x) = \cos(x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} T_0^5 f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \frac{1}{5!}f^{(5)}(0)x^5 \\ &= \sin(0) + \cos(0)x - \frac{1}{2}\sin(0)x^2 - \frac{1}{6}\cos(0)x^3 + \frac{1}{4!}\sin(0)x^4 + \frac{1}{5!}\cos(0)x^5 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5. \end{aligned}$$

NOTA. Del ejemplo anterior se deduce que para valores x próximos a 0 podemos aproximar el seno por el ángulo pues:

$$\sin(x) \sim T_0^1 f(x) = x \text{ para } x \sim 0.$$

Ejemplo 7. Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

Ejemplo 8. Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = \ln x$ en $x = 1$.

1.6 Puntos críticos

Definición. Los puntos críticos de una función f son los valores de x tales que:

$$\boxed{f'(x) = 0.}$$

Observaciones.

- Los puntos críticos de una función f se pueden clasificar como máximos locales, mínimos locales o puntos de inflexión.
- La recta tangente a $y = f(x)$ en un punto crítico a es de la forma $y = f(a)$ (paralela al eje de las x).

Clasificación. Sea a un punto crítico de f . Por tanto, $f'(a) = 0$. El polinomio de Taylor de f en $x = a$ de orden 2 se escribe como sigue:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2.$$

- Si $f''(a) > 0$ entonces (para puntos x próximos a a) tenemos:

$$f(x) \sim p(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2}_{>0} > f(a)$$

y, por tanto, $x = a$ es un mínimo local.

- Si $f''(a) < 0$ entonces (para puntos x próximos a a) tenemos:

$$f(x) \sim p(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2}_{<0} < f(a)$$

y, por tanto, $x = a$ es un máximo local.

- Si $f''(a) = 0$ entonces para poder clasificar el punto crítico tendríamos que comparar $f(x)$ con (para puntos x próximos a a) con el polinomio de orden superior a 2.

Ejemplo. Haz un esbozo de las gráficas y considera los puntos críticos de las funciones: $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ y $h(x) = x^3$.

2 Funciones reales de varias variables

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales ó, en general, sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de varias variables.

2.1 Continuidad

Definición. La función f es *continua en* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Nótese que para que la condición anterior se cumpla tienen que existir $f(a, b)$ y el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b) .

Si no existe $f(a, b)$ y sí existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$, la función f puede prolongarse por continuidad a (a, b) .

Definición. Se dice que f es *continua en* un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si es continua en todos los puntos del conjunto A .

Coordenadas polares En lugar de considerar un punto del plano P dado por sus coordenadas cartesianas, podemos describir el punto P dando la distancia r del punto al origen O de coordenadas y de manera que $\overrightarrow{OP}$ forma un ángulo θ (en la dirección opuesta a la de las agujas del reloj) con un eje fijo (tomaremos el eje positivo de las x). Se tiene:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Nota. Si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ entonces haciendo el cambio a coordenadas polares se puede calcular como sigue:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Ejemplo 1. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución. Si $(x, y) \neq (0, 0)$ la función es continua porque es composición de funciones continuas. En $(0, 0)$ hacemos un cambio a coordenadas polares. Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(1 + r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))}{\sqrt{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(1 + r^2)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{2r}{1+r^2}}{1} \quad \text{L'Hôpital} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego la función es continua también en el $(0, 0)$.

Ejemplo 2. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución. Si $(x, y) \neq (0, 0)$ la función es continua porque es composición de funciones continuas. En $(0, 0)$ hacemos un cambio a coordenadas polares. Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r \cos(r^2)}{2r} \quad \text{L'Hôpital} \\ &= \cos(0) = 1. \end{aligned}$$

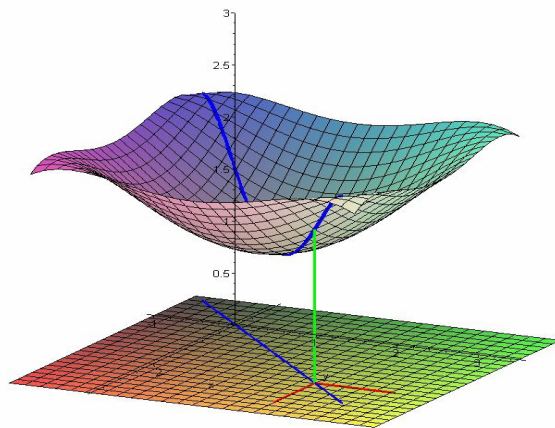
Luego f es una función continua en $\mathbb{R}^2$.

2.2 Derivadas direccionales

Definición. La *derivada de f en el punto (a, b) en la dirección del vector $\vec{v}$* se denota $D_{\vec{v}}f(a, b)$ y se define como sigue:

$$D_{\vec{v}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + h\vec{v}) - f(a, b)}{h}.$$

La derivada de f en el punto (a, b) en la dirección del vector $\vec{v}$ indica la variación de la función en la dirección del vector $\vec{v}$ (véase la siguiente figura).



Si $\|\vec{v}\| = 1$, $D_{\vec{v}}f(a, b)$ se denomina *derivada direccional de f en (a, b) en la dirección del vector $\vec{v}$* .

Nótese que si $\|\vec{v}\| = 1$ entonces existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Por tanto, también usaremos la notación $D_{\theta}f(a, b)$. Esto es,

$$\begin{aligned} D_{\theta}f(a, b) &= D_{\vec{v}}f(a, b) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + h(\cos \theta, \sin \theta)) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cos \theta, b + h \sin \theta) - f(a, b)}{h}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcular las derivadas direccionales de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en el punto $(0, 0)$.

Tomamos una dirección arbitraria de ángulo θ . Tenemos:

$$\begin{aligned} D_{\theta}f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(\cos \theta, \sin \theta)) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \theta, h \sin \theta)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h \cos \theta)^3 + (h \sin \theta)^4}{(h \cos \theta)^2 + (h \sin \theta)^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3(\cos^3 \theta + h \sin^4 \theta)}{h^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3(\cos^3 \theta + h \sin^4 \theta)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\cos^3 \theta + h \sin^4 \theta) \\ &= \cos^3 \theta. \end{aligned}$$

En particular, $D_{\theta=0}f(0, 0) = 1$ y $D_{\theta=\pi/2}f(0, 0) = 0$.

Ejemplo 4. Calcular las derivadas direccionales de

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en el punto $(0, 0)$.

Tomamos una dirección arbitraria de ángulo θ . Tenemos:

$$\begin{aligned} D_{\theta}f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(\cos \theta, \sin \theta)) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \theta, h \sin \theta)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin\left(\frac{1}{|h|}\right)}{h} \end{aligned}$$

y dicho límite no existe.

2.3 Derivadas parciales

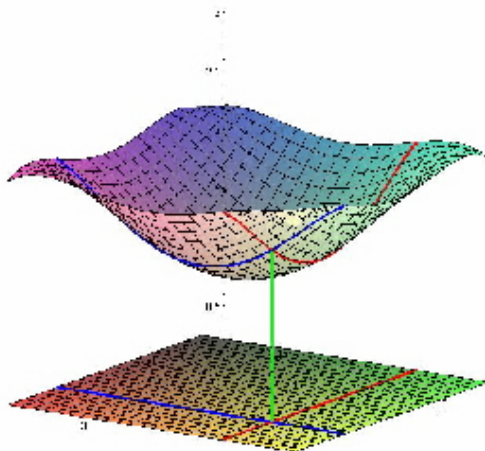
Definición. Sea $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. La *derivada parcial respecto de x de f en el punto (a, b)* se denota $f_x(a, b)$ ó $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ y se define como

$$f_x(a, b) = D_{\vec{e}_1} f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

La *derivada parcial respecto de y de f en el punto (a, b)* se denota $f_y(a, b)$ ó $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ y se define como

$$f_y(a, b) = D_{\vec{e}_2} f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

(Véase la siguiente figura).



Definición (Función derivada parcial). La *función derivada parcial de f respecto de x* es la siguiente función:

$$\begin{aligned} f_x: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f_x(x, y) \end{aligned}$$

Análogamente, la *función derivada parcial de f respecto de y* es la función que a cada punto (x, y) le asigna el valor $f_y(x, y)$.

Observación 1. La derivada parcial en un punto de una función de varias variables es la derivada de la función de una variable obtenida al considerar constantes todas las variables salvo la variable que indica la parcial en cuestión. Por tanto se pueden aplicar las reglas de derivación de una variable.

Observación 2. Cuando estudiemos el concepto de diferenciabilidad se verá que, bajo ciertas condiciones, se pueden calcular las derivadas direccionales a partir de las derivadas parciales.

Ejemplo 5. Sea la función

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^2 + y^5 + 6.$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xy + 3y^2, \\ f_y(x, y) &= x^2 + 6xy + 5y^4. \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Hallar las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{xy} & \text{si } x \neq 0 \text{ y } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \end{cases}$$

En un punto (x, y) tal que $xy \neq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{ye^{xy}xy - (e^{xy} - 1)y}{(xy)^2} = \frac{e^{xy}xy - e^{xy} + 1}{x^2y}, \\ f_y(x, y) &= \end{aligned}$$

En un punto de la forma $(a, 0)$ para calcular las derivadas parciales lo tenemos que hacer por la definición. Tenemos:

$$\begin{aligned} f_x(a, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, 0) - f(a, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \\ f_y(a, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, 0+h) - f(a, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{ah} - 1}{ah} - 1}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1 - ah}{ah^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ae^{ah} - a}{2ah} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2e^{ah}}{2a} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Por razones de simetría en $(0, b)$ tenemos: $f_x(0, b) = b/2$ y $f_y(0, b) = 0$.

Calcular:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \\ f_y(0, 0) &= \end{aligned}$$

Mediante contraejemplos, veremos que no existe ninguna relación entre la continuidad de una función y la existencia de derivadas parciales o direccionales.

Ejemplo (Función no continua y con derivadas direccionales). La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es continua en el $(0, 0)$ pues acercándonos al $(0, 0)$ por las parábolas $y = mx^2$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx^2}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m x^2}{x^4 + m^2 x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 m}{x^4 (1 + m^2)} = \frac{m}{1 + m^2} \end{aligned}$$

que depende de m ; esto es, el límite depende de la parábola por la que nos acerquemos al punto $(0, 0)$. Sin embargo, las derivadas direccionales sí existen:

$$\begin{aligned} D_{\theta} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h \cos \theta, 0 + h \sin \theta) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \theta, h \sin \theta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{h^4 \cos^4 \theta + h^2 \sin^2 \theta}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{h^3 (h^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{h^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

que existe salvo cuando $\sin \theta = 0$; esto es, cuando $\theta = 0$ ó π .

Cuando $\theta = 0$, tenemos $\vec{v} = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ y

$$D_{\theta=0} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

y cuando $\theta = \pi$, entonces $\vec{v} = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$ y

$$D_{\theta=\pi} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 - h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Por tanto, existe la derivada direccional de f en el punto $(0, 0)$ en cualquier dirección.

Ejemplo (Función continua y no existe alguna de sus derivadas direccionales).

La función,

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en el punto $(0, 0)$ pues cambiando a coordenadas polares tenemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin\left(\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

pues la función $\sin(1/r^2)$ está acotada. Sin embargo, no existen sus derivadas parciales:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h}$$

pues dicho límite no existe.

2.4 Vector gradiente

Definición. El *vector gradiente de f en un punto (a, b)* se denota $\nabla f(a, b)$ y es el vector de $\mathbb{R}^2$ cuyas componentes son las derivadas parciales de f en el punto (a, b) ; esto es,

$$\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) \in \mathbb{R}^2.$$

Definición. El *vector gradiente de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$* es el siguiente vector

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Ejemplo. Hallar el vector gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2 + ye^x + \frac{z}{y}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \\ &= \left(x^2 + ye^x, e^x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

2.5 Diferenciabilidad

Definición. Dada una función $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable (existen sus derivadas direccionales y, por tanto, las derivadas parciales) en un punto (a, b) , se llama *diferencial de f en (a, b)* a la aplicación lineal

$$\begin{aligned} df(a, b): \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h, k) &\longmapsto f_x(a, b)h + f_y(a, b)k. \end{aligned}$$

Definición. Decimos que f es *diferenciable* en (a, b) cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existen las derivadas parciales de f en (a, b) .
2. El siguiente límite es cero:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Observación 1. Por tanto, f es *diferenciable* en (a, b) cuando la diferencial aproxima el cambio de f cuando hacemos un cambio en la x y en la y ; esto es, si

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \approx f_x(a, b)h + f_y(a, b)k.$$

Definición. Si f es diferenciable en todos los puntos de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces se dice que f es *diferenciable en A* .

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad). Si f es una función con derivadas parciales continuas, entonces f es diferenciable.

Ejemplo. Estudiar la diferenciabilidad de la función: $f(x, y) = \sin(xy) + e^{x^2y} + \sqrt{x^2 + 1}$. La función f es continua en $\mathbb{R}^2$ pues es composición de funciones polinómicas, exponenciales, función seno y función irracional con radicando positivo. Tenemos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \cos(xy) + 2xye^{x^2y} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ f_y(x, y) &= x \cos(xy) + x^2e^{x^2y} \end{aligned}$$

son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ y, por tanto, f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1. Si f es una función diferenciable en (a, b) entonces es continua en (a, b) .

Demostración. Veamos que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

ó equivalentemente que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f(a+h, b+k) - f(a, b)) = 0.$$

Como f es diferenciable en (a, b) tenemos:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

luego,

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \epsilon(h, k)$$

donde $\epsilon(h, k)$ es una cantidad pequeña que depende de (h, k) . Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f(a+h, b+k) - f(a, b)) &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \epsilon(h, k)) \sqrt{h^2 + k^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo (Función diferenciable). La función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en el $(0, 0)$.

Tenemos:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0,$$

y por simetría $f_y(0, 0) = 0$. Y

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - (f_x(0, 0)h + f_y(0, 0)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2 + k^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \frac{1}{r} = 0. \end{aligned}$$

Luego, f es diferenciable en $(0, 0)$.

Ejemplo (Función no diferenciable y existen sus derivadas parciales). La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es diferenciable en el $(0, 0)$ y sin embargo existen sus derivadas parciales en el $(0, 0)$.

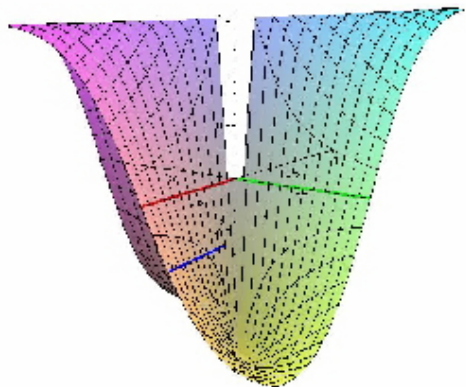
Tenemos:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

y por simetría $f_y(0, 0) = 0$. Y

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - (f_x(0, 0)h + f_y(0, 0)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-3hk}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-3r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-3 \cos \theta \sin \theta}{r} = +\infty. \end{aligned}$$

Luego, f no es diferenciable en $(0, 0)$. (Véase la siguiente figura en la que se representa la gráfica de f y las rectas tangentes a distintas curvas contenidas en la gráfica y que contienen al punto $(0, 0)$. Nótese que dichas rectas no forman un plano).



Teorema 2. Si f es una función diferenciable en (a, b) entonces existen las derivadas direccionales de f en (a, b) en cualquier dirección $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Además se verifica:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(a, b) &= \nabla f(a, b) \cdot \vec{v} \\ &= f_x(a, b)v_1 + f_y(a, b)v_2. \end{aligned}$$

Si expresamos $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ entonces:

$$D_{\vec{v}}f(a, b) = f_x(a, b) \cos \theta + f_y(a, b) \sin \theta.$$

Demostración. Como f es diferenciable en (a, b) tenemos:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \epsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

con

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \epsilon(h, k) = 0.$$

Tomando $(h, k) = (t \cos \theta, t \sin \theta)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta) - f(a, b) &= f_x(a, b)t \cos \theta + f_y(a, b)t \sin \theta \\ &\quad + \epsilon(t \cos \theta, t \sin \theta)\sqrt{t^2} \\ &= t f_x(a, b) \cos \theta + t f_y(a, b) \sin \theta + t \epsilon(t \cos \theta, t \sin \theta) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta) - f(a, b)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t f_x(a, b) \cos \theta + t f_y(a, b) \sin \theta + |t| \epsilon(t \cos \theta, t \sin \theta)}{t} \\ &= f_x(a, b) \cos \theta + f_y(a, b) \sin \theta. \end{aligned}$$

Ejemplo. Calculamos la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector $(-1, 0)$.

Como la función f es polinómica, es de clase infinito. Se tiene:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 2y \\ f_y(x, y) &= 2x + 2y \end{aligned}$$

luego, si $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ tenemos:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(1, 1) &= f_x(1, 1) \cos \theta + f_y(1, 1) \sin \theta \\ &= 5 \cos \theta + 4 \sin \theta. \end{aligned}$$

Para $\theta = \pi$, $\vec{v} = (-1, 0)$ y $D_{\vec{v}}f(1, 1) = -5$.

Corolario. De la igualdad:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(a, b) &= \nabla f(a, b) \cdot \vec{v} \\ &= \|\nabla f(a, b)\| \|\vec{v}\| \cos \alpha \\ &= \|\nabla f(a, b)\| \cos \alpha \end{aligned}$$

donde $\|\vec{v}\| = 1$ y α es el ángulo que forman los vectores $\nabla f(a, b)$ y $\vec{v}$, se deduce:

- $D_{\vec{v}}f(a, b)$ es máximo cuando $\cos \alpha = 1$ y por tanto, cuando $\vec{v}$ tiene la dirección del vector $\nabla f(a, b)$. En ese caso:

$$\max_{\vec{v}} D_{\vec{v}}f(a, b) = \|\nabla f(a, b)\|.$$

- $D_{\vec{v}}f(a, b)$ es mínimo cuando $\cos \alpha = -1$ y por tanto, cuando $\vec{v}$ tiene la dirección del vector $-\nabla f(a, b)$. En ese caso:

$$\min_{\vec{v}} D_{\vec{v}}f(a, b) = -\|\nabla f(a, b)\|.$$

Ejemplo. Sea $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x$. Se pide (i) dirección de máximo crecimiento de f en $(0, 0)$, (ii) derivada direccional máxima de f en $(0, 0)$, y (iii) dirección θ tal que $D_{\theta}f(0, 0) = 0$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (e^x \sin y + e^y \cos x, e^x \cos y + e^y \sin x), \\ \nabla f(0, 0) &= (1, 1). \end{aligned}$$

Por tanto, (i) la dirección de máximo crecimiento es la del vector $\vec{v} = (1, 1)$. (ii) La derivada direccional máxima es: $\|\nabla f(0, 0)\| = \sqrt{2}$. (iii) Y

$$\begin{aligned} 0 &= D_{\theta}f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= \cos \theta + \sin \theta, \end{aligned}$$

por tanto, si $(\cos \theta, \sin \theta) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ó $(\cos \theta, \sin \theta) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

2.6 Plano tangente

Proposición. El vector gradiente es ortogonal a las curvas de nivel.

Demostración. Sea $(x(t), y(t))$ la curva de nivel c de una función f . Esto es,

$$f(x(t), y(t)) = c.$$

Derivamos la expresión anterior utilizando la regla de la cadena (regla de derivación para funciones compuestas):

$$f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Equivalentemente

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0.$$

Como el vector $(x'(t), y'(t))$ es tangente a la curva $(x(t), y(t))$ se concluye.

Ecuación del plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$.

La superficie con ecuación $z = f(x, y)$ se puede ver como la curva de nivel 0 de la función:

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Por la proposición anterior tenemos que $\nabla F(x, y, z)$ es ortogonal a la curva de nivel $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$; esto es, es ortogonal a la superficie. Tenemos:

$$\nabla F(x, y, z) = (f_x(x, y), f_y(x, y), -1).$$

Por tanto, el plano tangente es el plano en el punto $(a, b, f(a, b))$ que contiene al punto $(a, b, f(a, b))$ y tiene vector característico:

$$\nabla F(a, b, f(a, b)) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$$

luego su ecuación es:

$$(f_x(a, b), f_y(a, b), -1) \cdot (x - a, y - b, z - f(a, b)) = 0$$

equivalentemente,

$$\boxed{z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) .}$$

Ejemplo. Se considera el paraboloides

$$z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2).$$

Se pide: la ecuación del plano tangente al paraboloides en el punto $(1, 1, 1/2)$, (ii) dirección de máxima pendiente del paraboloides en $(1, 1)$, (ii) derivada direccional máxima del paraboloides en $(1, 1)$.

Solución. (i) El paraboloides se puede ver como la gráfica de la función:

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$$

Se tiene:

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{1}{5}x, -\frac{4}{5}y\right) \Rightarrow \nabla f(1, 1) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

La ecuación del plano tangente es:

$$\begin{aligned} z &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(x - 1) - \frac{4}{5}(y - 1). \end{aligned}$$

Esto es,

$$10z = 5 - 2(x - 1) - 8(y - 1).$$

(ii) La dirección de máxima pendiente del paraboloides en el punto $(1, 1)$ es la dirección del vector: $\nabla f(1, 1) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ y (iii) la máxima pendiente es:

$$\|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Ejemplo. Ecuación del plano tangente al elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{3} + 4y^2 + z^2 = 5.$$

en el punto $(0, 1, 1)$. **Nota:** Nótese que en un entorno del punto $(0, 1, 1)$ podemos expresar una parte del elipsoide con la siguiente ecuación:

$$z = +\sqrt{5 - \frac{x^2}{3} - 4y^2}$$

y, por tanto, verlo como la gráfica de la función

$$f(x, y) = \sqrt{5 - \frac{x^2}{3} - 4y^2}.$$

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva intersección de las superficies $xy + xz + yz = 3$ y $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ en el punto $(1, 1, 1)$.

2.7 Derivadas de orden superior

Las *derivadas parciales segundas* de f son las derivadas parciales de las funciones derivadas parciales primeras y se denotan: f_{xx} ó $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xy} ó $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{yx} ó $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y f_{yy} ó $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Análogamente se definen las derivadas parciales de orden superior. Por ejemplo, f_{xyx} es la derivada parcial respecto de x de la función f_{xy} .

Ejemplo. Vamos a calcular las derivadas parciales primeras, segundas y terceras de $f(x, y) = x^3 + 4xy + y^2$. Tenemos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 3x^2 + 4y & \quad \begin{cases} f_{xx}(x, y) = 6x \\ f_{xy}(x, y) = 4 \end{cases} & \quad \begin{cases} f_{xxx}(x, y) = 6 \\ f_{xxy}(x, y) = 0 \\ f_{xyx}(x, y) = 0 \\ f_{xyy}(x, y) = 0 \end{cases} \\ f_y(x, y) = 4x + 2y & \quad \begin{cases} f_{yx}(x, y) = 4 \\ f_{yy}(x, y) = 2 \end{cases} & \quad \begin{cases} f_{yxx}(x, y) = 0 \\ f_{yxy}(x, y) = 0 \\ f_{yyx}(x, y) = 0 \\ f_{yyy}(x, y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Teorema de Schwarz (igualdad de las derivadas cruzadas) Si existen f_x y f_y y existe también f_{xy} y además es una función continua entonces existe f_{yx} y $f_{yx} = f_{xy}$.

Ejemplo. Por tanto, en el ejemplo anterior bastaría calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 3x^2 + 4y & \quad \begin{cases} f_{xx}(x, y) = 6x \\ f_{xy}(x, y) = 4 \\ f_{yy}(x, y) = 2 \end{cases} & \quad \begin{cases} f_{xxx}(x, y) = 6 \\ f_{xxy}(x, y) = 0 \\ f_{xyy}(x, y) = 0 \\ f_{yyy}(x, y) = 0 \end{cases} \\ f_y(x, y) = 4x + 2y & \end{aligned}$$

pues $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, $f_{xxy}(x, y) = f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y)$ y $f_{xyy}(x, y) = f_{yyx}(x, y) = f_{yyy}(x, y)$.

2.7.1 Función de clase r

Definición. Una función f se dice de *clase r* y se denota $f \in C^r$ si existen y son continuas todas las derivadas parciales de f hasta orden r .

Definición. Una función es de *clase infinito* y se denota $f \in C^\infty$ si existen y son continuas todas las derivadas parciales de f de cualquier orden.

2.8 Matriz hessiana

Definición. La *matriz hessiana* de f en (a, b) se denota $Hf(a, b)$ y es la matriz cuyas componentes son las derivadas segundas de la función f en el punto (a, b) ; esto es,

$$Hf(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Normalmente, la función f satisface las condiciones del Teorema de Schwarz y por tanto, la matriz hessiana es una matriz simétrica ya que $f_{yx} = f_{xy}$.

Al determinante de la matriz hessiana lo denominaremos *hessiano* de f .

2.9 Polinomio de Taylor

Objetivo: Aproximar funciones mediante polinomios.

Definición. El *polinomio de Taylor* de f en (a, b) de orden k lo denotaremos $T_{(a,b)}^k f(x, y)$ (o simplemente $p(x, y)$) es el polinomio que mejor aproxima f en puntos próximos a (a, b) . Esto es, es el único polinomio tal que:

$$\begin{cases} f_x(a, b) = p_x(a, b) \\ f_y(a, b) = p_y(a, b) \end{cases}, \quad \begin{cases} f_{xx}(a, b) = p_{xx}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) = p_{xy}(a, b) \\ f_{yy}(a, b) = p_{yy}(a, b) \end{cases} \quad \dots etc.$$

- La expresión del polinomio de Taylor de orden 1 en el punto (a, b) es:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &= f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b). \end{aligned}$$

Nota. Nótese que la gráfica del polinomio de Taylor de orden 1; esto es,

$$z = p(x, y) \iff z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b),$$

es el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, b, f(a, b))$.

- La expresión del polinomio de Taylor de orden 2 en el punto (a, b) es:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) + \frac{1}{2}(x - a, y - b)Hf(a, b)(x - a, y - b)^t \\ &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2). \end{aligned}$$

Nota. Nótese que la gráfica del polinomio de Taylor de orden 2 es una cuádrica (superficie dada por una ecuación de grado 2 en x, y, z).

Ejemplo. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de la función

$$f(x, y) = \sin((x-1)^2 + y - 1)$$

en el punto $(1, 1)$ y hallar el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1, 0)$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2(x-1) \cos((x-1)^2 + y - 1), \\ f_y(x, y) &= \cos((x-1)^2 + y - 1). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x-1) + f_y(1, 1)(y-1) \\ &= \sin(0) + \cos(0)(y-1) \\ &= y-1. \end{aligned}$$

El plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1, 0)$ es $z = y - 1$.

Ejemplo. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y) = \ln(1+x^2+y^2)$ en el punto $(0, 0)$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2x}{1+x^2+y^2}, & f_y(x, y) &= \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{2(1+x^2+y^2) - 4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ f_{xy}(x, y) &= -\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x, y) &= \frac{2(1+x^2+y^2) - 4y^2}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)(x-0) + f_y(0, 0)(y-0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0, 0)(x-0)(y-0) + f_{yy}(0, 0)(y-0)^2) \\ &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) \\ &= \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

La gráfica del polinomio de Taylor obtenido es el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

2.10 Puntos críticos

Definición. Los puntos críticos de una función f son los valores de (x, y) tales que:

$$\boxed{\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff f_x(x, y) = 0 \text{ y } f_y(x, y) = 0.}$$

- Los puntos críticos de una función f se pueden clasificar como máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.
- Análogamente los puntos críticos de una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son aquellos valores de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para los cuales $\nabla f = 0$.
- El plano tangente a $z = f(x, y)$ en un punto crítico (a, b) es de la forma $z = f(a, b)$ (paralelo al plano $z = 0$).

Clasificación. Sea (a, b) un punto crítico de f . Por tanto, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. El polinomio de Taylor de f en (a, b) de orden 2 se escribe como sigue:

$$p(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2}(x - a, y - b)Hf(a, b)(x - a, y - b)^t.$$

Por tanto, (para puntos (x, y) próximos a (a, b)) tenemos:

$$f(x, y) \sim f(a, b) + \frac{1}{2}(x - a, y - b)Hf(a, b)(x - a, y - b)^t$$

luego el signo de $f(x, y) - f(a, b)$ dependerá del signo de $(x - a, y - b)Hf(a, b)(x - a, y - b)^t$.

- Si $\det Hf(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces:

$$(x - a, y - b)Hf(a, b)(x - a, y - b)^t > 0$$

y, por tanto, $f(x, y) < f(a, b)$. El punto (a, b) es un mínimo local de f .

- Si $\det Hf(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces:

$$(x - a, y - b)Hf(a, b)(x - a, y - b)^t < 0$$

y, por tanto, $f(x, y) > f(a, b)$. El punto (a, b) es un máximo local de f .

- Si $\det Hf(a, b) < 0$ entonces:

$$(x - a, y - b)Hf(a, b)(x - a, y - b)^t$$

puede ser positivo o negativo (dependiendo del punto (x, y)) y, por tanto, el punto (a, b) es un punto de silla de f .

- Si $\det Hf(a, b) = 0$ se necesita más información para poder clasificar el punto crítico. (Caso análogo a $f'(x) = f''(x) = 0$ para funciones de una variable).

Ejemplo. Hallar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x + 2x^2y^2 - x^2 + y^2$$

y clasificarlos.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 1 + 4xy^2 - 2x, \\ f_y(x, y) &= 4x^2y + 2y \end{aligned}$$

por tanto, $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si y sólo si,

$$\begin{cases} 1 + 4xy^2 - 2x = 0 \\ 4x^2y + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 4xy^2 - 2x = 0 \\ 2y(2x^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

De la ecuación $2y(2x^2 + 1) = 0$ se deduce $y = 0$ y sustituyéndolo en la primera ecuación tenemos: $x = 1/2$. Por tanto f tiene un único punto crítico $(1/2, 0)$.

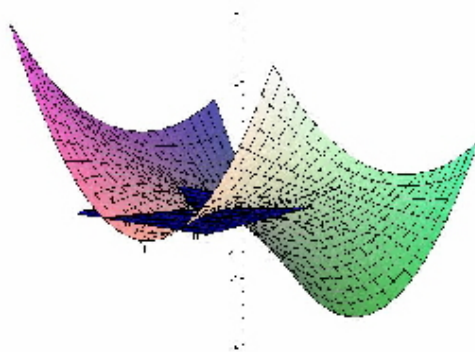
Tenemos:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 4y^2 - 2 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

luego

$$\det Hf(1/2, 0) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} < 0$$

luego $(1/2, 0)$ es un punto de silla (véase la siguiente figura).



Ejemplo. Clasificar los puntos críticos de $f(x, y) = \cos(x + y) \sin x$, para $x, y \in (0, \pi)$.

Solución. Tenemos $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si y sólo si

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -\sin(x + y) \sin x + \cos(x + y) \cos x = 0 \\ f_y(x, y) = -\sin(x + y) \sin x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x + y) \cos x = 0 \\ \sin(x + y) \sin x = 0 \end{cases}$$

De la ecuación: $\cos(x + y) \cos x = 0$ se deduce: $\cos(x + y) = 0$ ó $\cos x = 0$. Tenemos:

- $\cos x = 0$ si y sólo si $x = \pi/2$. Sustituyendolo en la segunda ecuación, tenemos

$$\sin(\pi/2 + y) \sin(\pi/2) = 0$$

que se cumple sólo si $y = -\pi/2 \notin (0, \pi)$ o $y = \pi/2$.

- $\cos(x + y) = 0$ si y sólo si $x + y = \pi/2$. Sustituyendolo en la segunda ecuación, tenemos

$$\sin(\pi/2) \sin x = 0$$

que se cumple sólo si $x = 0 \notin (0, \pi)$ o $x = \pi \notin (0, \pi)$.

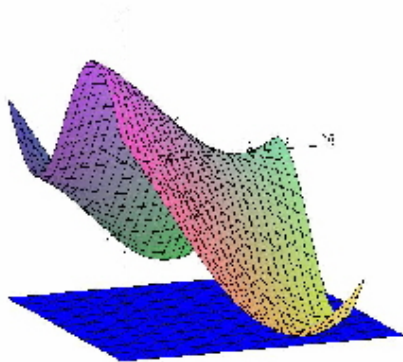
Por tanto f tiene un único punto crítico: $(\pi/2, \pi/2)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -2\cos(x + y) \sin x - 2\sin(x + y) \cos x, \\ f_{xy}(x, y) &= -\cos(x + y) \sin x - \sin(x + y) \cos x, \\ f_{yy}(x, y) &= -\cos(x + y) \sin x, \end{aligned}$$

luego

$$Hf(\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det Hf(\pi/2, \pi/2) > 0$, y $f_{xx}(\pi/2, \pi/2) = 2 > 0$, el punto crítico $(\pi/2, \pi/2)$ es un punto de mínimo local (véase la siguiente figura).



2.11 Extremos condicionados

Objetivo: Hallar máximos y mínimos de funciones sujetas a ligaduras ó restricciones.

Teorema de Lagrange. Sean f y g funciones con derivadas parciales primeras continuas tales que f tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) de la curva de la ligadura $g(x, y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe un número real λ , que se denomina *multiplicador de Lagrange*, tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Método de los multiplicadores de Lagrange. Supongamos que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen las condiciones del Teorema de Lagrange. Un extremo relativo de f condicionado a la restricción $g(x, y) = c$ debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

para cierto valor de λ . Se evalúa f en los puntos obtenidos y el punto en el que el valor de f sea máximo (resp. mínimo) es un máximo (resp. mínimo) de f relativo restringido a la condición $g(x, y) = c$.

Ejemplo 1. Maximizar la función $f(x, y) = e^{xy}$ sujeta a la ligadura $x^2 + y^2 = 8$.

Solución. Consideramos la función $g(x, y) = x^2 + y^2$. Por tanto, los puntos (x, y) de la ligadura son los puntos (x, y) tales que $g(x, y) = 8$. Tenemos:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} ye^{xy} = 2\lambda x \\ xe^{xy} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Despejando λ de la primera ecuación obtenemos: $\lambda = \frac{y}{2x}e^{xy}$ y lo sustituimos en la segunda ecuación:

$$xe^{xy} = 2 \frac{y}{2x} e^{xy} y \iff x^2 - y^2 = 0,$$

de donde, o bien $y = x$ o bien $y = -x$; esto es, $y = \pm x$. Por tanto, sustituyéndolo en la tercera ecuación obtenemos: $2x^2 = 8$, luego $x = \pm 2$. Obtenemos los siguientes puntos: $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ y $(-2, -2)$. Como $f(2, 2) = f(-2, -2) = e^4 > f(-2, 2) = f(2, -2) = e^{-4}$, los puntos $(2, 2)$, $(-2, -2)$ son máximos locales restringidos a la ligadura $x^2 + y^2 = 8$ y los puntos $(2, -2)$, $(-2, 2)$ son mínimos locales restringidos a la ligadura $x^2 + y^2 = 8$.

Ejemplo 2. Hallar la mínima distancia de los puntos de la curva plana $x^2 + 4y^2 = 3$ al punto $(1, 0)$.

Solución. La distancia de un punto (x, y) al punto $(1, 0)$ viene dada por:

$$d((x, y), (1, 0)) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Minimizar $d((x, y), (1, 0))$ es equivalente a minimizar $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$. Por tanto, queremos minimizar la función $f(x, y)$ con la ligadura $x^2 + 4y^2 = 3$. Consideramos la función $g(x, y) = x^2 + 4y^2$. Por tanto, los puntos (x, y) de la ligadura son los puntos (x, y) tales que $g(x, y) = 3$. Tenemos:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2y = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 3 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos $y = 0$ ó $\lambda = 1/4$.

Si $y = 0$, entonces de la tercera ecuación obtenemos: $x = \pm\sqrt{3}$, y de la primera $\lambda = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ y $\lambda = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Si $\lambda = 1/4$, entonces de la primera ecuación obtenemos $x = 4/3$, y de la tercera ecuación: $y = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$. Por tanto, los candidatos a extremos condicionados son:

$$\left(\pm\sqrt{3}, 0\right), \left(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{11}}{6}\right).$$

Como

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}, 0) &= 4 - 2\sqrt{3}, \\ f(-\sqrt{3}, 0) &= 2\sqrt{3} + 4, \\ f\left(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{11}}{6}\right) &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

El mínimo se alcanza en los puntos $\left(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$ y la distancia mínima es $\left(\frac{5}{12}\right)^{1/2}$.

Ejemplo (Multiplicadores de Lagrange para funciones de tres variables). Hallar la mínima distancia al origen de los de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

Solución. La distancia de un punto (x, y, z) al punto $(0, 0, 0)$ viene dada por:

$$d((x, y, z), (0, 0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Minimizar $d((x, y, z), (0, 0, 0))$ es equivalente a minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Por tanto, queremos minimizar la función $f(x, y, z)$ con la ligadura $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Consideramos la función $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Tenemos:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y = 4\lambda y \\ 2z = 6\lambda z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $\lambda = 1$ ó $x = 0$.

Si $\lambda = 1$ de la segunda y tercera ecuación obtenemos: $y = z = 0$. Por tanto, sustituyéndolo en la cuarta ecuación obtenemos: $x = \pm 2$.

Si $x = 0$, entonces de la segunda ecuación obtenemos $\lambda = 1/2$ o $y = 0$.

Si $\lambda = 1/2$ entonces de la tercera ecuación tenemos $z = 0$ y sustituyéndolo en la cuarta ecuación obtenemos: $y = \pm \sqrt{2}$.

Si $y = 0$ entonces de la tercera ecuación obtenemos $z = 0$ (que no puede ser porque el $(0, 0, 0)$ no satisface la ligadura) ó $\lambda = 1/3$. Sustituyéndolo en la cuarta ecuación obtenemos: $z = \pm 2/\sqrt{3}$. Luego los extremos condicionados son:

$$(\pm 2, 0, 0), (0, \pm \sqrt{2}, 0) \text{ y } (0, 0, \pm 2/\sqrt{3}).$$

Como $f(\pm 2, 0, 0) = 4$, $f(0, \pm \sqrt{2}, 0) = 2$ y $f(0, 0, \pm 2/\sqrt{3}) = 4/3$. Los puntos donde la distancia es mínima son $(0, 0, \pm 2/\sqrt{3})$ y la distancia mínima es $2/\sqrt{3}$.