

"Confieso francamente que nunca he sentido gusto por el estudio o la investigación en física o en geometría, a no ser que pudiera servir como medio de llegar a algún tipo de conocimiento de las causas próximas...para el bien y la comodidad de la vida, el mantenimiento de la salud, la práctica de algún arte...pues he observado que una buena parte de las artes se basa en la geometría, como el de tallar la piedra en arquitectura, el de los relojes de sol, y el de la perspectiva en particular."

Girard Desargues

1 Espacio Projectivo

1.1 Definiciones

Sea V un espacio vectorial.

- Se llama *espacio proyectivo* y se denota $\mathbb{P}(V)$ al conjunto de rectas vectoriales de V .
- Cada recta vectorial se llama *punto proyectivo*.
- Se llama *dimensión* del espacio proyectivo a $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$.

El espacio proyectivo se puede definir de modo alternativo como las clases de equivalencia de vectores no nulos de V con la siguiente relación de equivalencia: $\vec{v}$ está relacionado con $\vec{w}$ si y sólo si existe $\lambda \neq 0$, $\vec{v} = \lambda \vec{w}$.

En particular, llamamos *plano proyectivo real* y se denota $\mathbb{P}_2$ al conjunto de rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$; esto es

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \{ \langle \vec{v} \rangle \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \}.$$

Y llamamos *espacio proyectivo real* y se denota $\mathbb{P}_3$ al conjunto de rectas vectoriales de $\mathbb{R}^4$; esto es

$$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4) = \{ \langle \vec{v} \rangle \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \}.$$

1.2 Coordenadas homogéneas

Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo. Se dice que una familia de puntos $\{ \langle \vec{v}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{v}_r \rangle \}$ de $\mathbb{P}(V)$ generan el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ si la familia de vectores $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \}$ generan el espacio vectorial V .

Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo. Se dice que los puntos $\langle \vec{v}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{v}_r \rangle$ de $\mathbb{P}(V)$ son *proyectivamente independientes* si los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ de V son linealmente independientes.

Ejemplo. Consideremos $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, entonces una familia generadora e independiente de puntos de $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ está formada por tres puntos $X_1 = \langle \vec{v}_1 \rangle$, $X_2 = \langle \vec{v}_2 \rangle$ y $X_3 = \langle \vec{v}_3 \rangle$ de manera que los tres vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

Y un punto $X = \langle \vec{w} \rangle \in \mathbb{P}_2$ se expresa de modo único como sigue:

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3,$$

y las coordenadas de X serían $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Si elegimos el representante $\lambda \vec{w}$ de X , pues $X = \langle \lambda \vec{w} \rangle \in \mathbb{P}_2$ entonces

$$\lambda \vec{w} = \lambda \alpha_1 \vec{v}_1 + \lambda \alpha_2 \vec{v}_2 + \lambda \alpha_3 \vec{v}_3,$$

y las coordenadas de X serían $(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3)$. Como las coordenadas son únicas vamos a identificar

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ con } (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3) \text{ para } \lambda \neq 0$$

y llamamos *coordenadas homogéneas* del punto X a la clase $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$; esto es,

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \{(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3), \text{ con } \lambda \neq 0\}.$$

1.3 Relación entre el espacio afín y el proyectivo

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín con espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^n$. Los puntos $X \in \mathbb{A}$ los podemos ver como puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ X &\longrightarrow \langle (1, X) \rangle. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{R} = \{O, B\}$ es un sistema de referencia de $\mathbb{A}$ y $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de $X \in \mathbb{A}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow \langle (1, x_1, \dots, x_n) \rangle. \end{aligned}$$

A los puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ que no son de la forma $\langle (1, x_1, \dots, x_n) \rangle$ se les denomina *puntos del infinito* o *puntos impropios*. Los puntos impropios son de la forma $\langle (0, x_1, \dots, x_n) \rangle$ por tanto, están en el hiperplano proyectivo de ecuación $x_0 = 0$.

Definición. Sea $\mathbb{A}_n$ un espacio afín con espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^n$ con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$. Se llama *espacio afín proyectivizado* y se denota $\overline{\mathbb{A}}_n$ al conjunto formado por todos los puntos de $\mathbb{A}_n$ junto con los puntos del infinito de $\mathbb{A}_n$; esto es,

$$\overline{\mathbb{A}}_n = \mathbb{A}_n \cup \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Identificamos $\overline{\mathbb{A}}_n$ con $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{A}}_n &\longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ (1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) &\longrightarrow [(x_0, x_1, \dots, x_n)], \quad (x_0 \neq 0) \text{ puntos propios de } \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ (0, x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow [(0, x_1, \dots, x_n)], \quad (x_0 = 0) \text{ puntos impropios de } \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \end{aligned}$$

1.4 Ecuaciones de las rectas del plano proyectivo

Sea $\mathbb{P}_2$ el plano proyectivo real.

Dados dos puntos independientes $P, Q \in \mathbb{P}_2$, se tiene $P = \langle \vec{v} \rangle$ y $Q = \langle \vec{w} \rangle$ con $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes, la recta r que contiene a P y Q es

$$r = \{ \langle \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \rangle \mid (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \}.$$

Si los puntos P y Q tienen las siguientes coordenadas homogéneas:

$$P = [(p_0, p_1, p_2)], \quad Q = [(q_0, q_1, q_2)]$$

entonces se tiene que un punto X pertenece a la recta r si y sólo si sus coordenadas $[(x_0, x_1, x_2)]$ cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \alpha x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \alpha x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases}, \quad (\alpha, \lambda, \mu) \neq (0, 0, 0)$$

que se llaman *ecuaciones paramétricas* de la recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$.

Equivalentemente el punto $X = [(x_0, x_1, x_2)]$ pertenece en la recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ si y sólo si

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

que es la *ecuación cartesiana* de la recta que se obtiene al imponer que el siguiente determinante se anule:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix}.$$

1.4.1 Relación entre las rectas del plano afín real y del plano proyectivo.

Sea $\mathbb{A}_2$ el plano afín con referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$ y sea la recta r del plano afín $\mathbb{A}_2$ con ecuación $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Sean $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ dos puntos de la recta, entonces los puntos del plano proyectivo $[(1, p_1, p_2)], [(1, q_1, q_2)]$ determinan una recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ con ecuación $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ que se llama la *recta de $\mathbb{P}_2$ asociada a la recta afín r* .

Recíprocamente, dada una recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ con ecuación $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Si $p_0 \neq 0$, entonces el punto del plano afín $\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}\right)$ está en la recta r del plano afín $\mathbb{A}_2$ de ecuación:

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0.$$

Definición. La recta que une dos puntos propios de $\mathbb{P}_2$ se dice que es una *recta propia* de $\mathbb{P}_2$.

Toda recta propia, $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, determina un punto del infinito o impropio $[0, -a_2, a_1]$ donde $(-a_2, a_1)$ es el vector director de la recta r del plano afín $\mathbb{A}_2$ de ecuación $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

Definición. La recta que une dos puntos impropios de $\mathbb{P}_2$ se dice que es una *recta impropia* de $\mathbb{P}_2$ y tiene ecuación $x_0 = 0$.

1.5 Ecuaciones de subespacios proyectivos de $\mathbb{P}_3$

Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio proyectivo real tridimensional.

1.5.1 Rectas en $\mathbb{P}_3$

Sean P, Q dos puntos independientes de $\mathbb{P}_3$. Por tanto, $P = \langle \vec{v} \rangle$ y $Q = \langle \vec{w} \rangle$ con $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ vectores linealmente independientes. La recta r que contiene a P y Q es

$$r = \{ \langle \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \rangle \mid (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \}.$$

Si los puntos P y Q tienen las siguientes coordenadas homogéneas:

$$P = [(p_0, p_1, p_2, p_3)], \quad Q = [(q_0, q_1, q_2, q_3)]$$

entonces se tiene que un punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ pertenece a la recta r si y sólo si sus coordenadas cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \alpha x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \alpha x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \\ \alpha x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}, \quad (\alpha, \lambda, \mu) \neq (0, 0, 0)$$

que se llaman *ecuaciones paramétricas* de la recta r del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$.

Equivalentemente el punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ pertenece en la recta r del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$ si y sólo si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{pmatrix} = 2,$$

de donde se obtienen las dos *ecuaciones cartesianas* de la recta.

Definición. La recta que une dos puntos propios de $\mathbb{P}_3$ se dice que es una *recta propia* de $\mathbb{P}_3$. Y sus ecuaciones son las ecuaciones homogéneas de una recta afín.

Definición. La recta que une dos puntos impropios de $\mathbb{P}_3$ se dice que es una *recta impropia* de $\mathbb{P}_3$.

Observación. En $\mathbb{P}_3$ hay infinitas rectas impropias.

1.5.2 Planos en $\mathbb{P}_3$

Dados tres puntos $P = \langle \vec{v} \rangle$, $Q = \langle \vec{w} \rangle$ y $R = \langle \vec{u} \rangle$ de $\mathbb{P}_3$ independientes, el plano que contiene a P , Q y R es

$$\pi = \{ \langle \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} + \gamma \vec{u} \rangle \mid (\lambda, \mu, \gamma) \neq (0, 0, 0) \}.$$

Si los puntos P , Q y R tienen las siguientes coordenadas homogéneas:

$$P = [(p_0, p_1, p_2, p_3)]$$

$$Q = [(q_0, q_1, q_2, q_3)]$$

$$R = [(r_0, r_1, r_2, r_3)]$$

entonces se tiene que un punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ pertenece al plano π del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$ si y sólo si sus coordenadas cumple las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 + \gamma r_0 \\ \alpha x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 + \gamma r_1 \\ \alpha x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 + \gamma r_2 \\ \alpha x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 + \gamma r_3 \end{cases}, \quad (\alpha, \lambda, \mu, \gamma) \neq (0, 0, 0, 0)$$

que se llaman *ecuaciones paramétricas* del plano π del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$.

Equivalentemente el punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ pertenece al plano π del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$ si y sólo si

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

que es la *ecuación cartesiana* del plano que se obtiene al imponer que el siguiente determinante se anule:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & p_0 & q_0 & r_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 & r_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 & r_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Observaciones.

Tres puntos propios determinan un *plano propio* de $\mathbb{P}_3$. Y su ecuación es la ecuación homogénea de un plano afín.

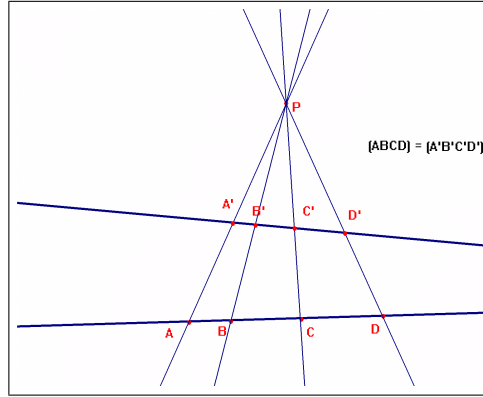
Tres puntos impropios determinan un *plano propio* de $\mathbb{P}_3$ que tiene por ecuación cartesiana la ecuación $x_0 = 0$.

Todo plano propio determina una recta impropia. Y toda recta impropia está contenida en el plano impropio $x_0 = 0$.

1.6 Razón doble

Teorema. Si cuatro puntos alineados A, B, C, D , se proyectan desde un vértice V en cuatro puntos alineados A', B', C', D' , entonces las siguientes razones son iguales:

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{A'C'}{C'B'}}{\frac{A'D'}{D'B'}}.$$



Observación. Por tanto la razón $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ se mantiene invariante por proyecciones.

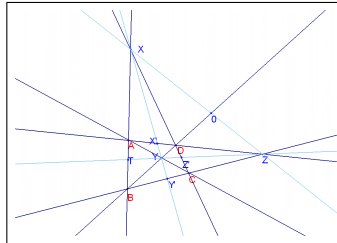
Definición. Sean A, B, C, D cuatro puntos alineados. Entonces la *razón doble* $\{A, B; C, D\}$ del par ordenado (C, D) con respecto al par ordenado (A, B) es

$$\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Un caso especial importante ocurre cuando el valor de la razón doble $\{A, B; C, D\}$ es -1 . En ese caso, C y D divide el segmento $\overline{AB}$ interna y externamente en la misma proporción y se dice que los pares de puntos (A, B) y (C, D) son *conjugados armónicos* uno con respecto al otro. Si, en particular, C y D divide $\overline{AB}$ divide interna y externamente en la razón $1 : 1$, entonces uno de ellos es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el otro es el punto del infinito de la recta que une A y B .

1.7 Cuadrángulo completo

Consideremos ahora cuatro puntos A, B, C, D en el plano de manera que no haya cuatro de ellos alineados. También se obtiene en este caso una configuración interesante conocida como *cuadrángulo completo*. Los puntos A, B, C, D se pueden unir en pares de tres maneras diferentes (AB, CD) , (AC, BD) y (AD, BC) . Cada par de lados opuestos tiene un punto de intersección X, Y, Z , llamados los *vértices del triángulo diagonal* del cuadrilátero.



2 Cónicas

Definición. Una *cónica* $\bar{C}$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ es el conjunto de puntos cuyas coordenadas en cierta referencia $\mathcal{R}$ satisfacen una ecuación homogénea de grado 2:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{01} x_0 x_1 + a_{10} x_1 x_0 \\ &\quad + a_{02} x_0 x_2 + a_{20} x_2 x_0 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1. \end{aligned}$$

Y se dice que es *propia* o *degenerada* si es o no irreducible.

Por ejemplo, $\bar{C}_1 \equiv x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_1x_2 = 0$ es una cónica propia pues el polinomio homogéneo de grado 2, $x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_1x_2 = 0$ es irreducible (no se puede poner como producto de dos polinomios de grado 1). Sin embargo, la cónica $C_2 \equiv x_0^2 - 4x_1^2 = 0$ es degenerada pues $x_0^2 - 4x_1^2 = (x_0 - 2x_1)(x_0 + 2x_1)$; esto es la cónica C_2 son dos rectas que se cruzan. Finalmente, la cónica $\bar{C}_3 \equiv (x_0 + 2x_1 + 3x_2)^2 = 0$ es degenerada. La cónica C_3 es una recta doble.

Usando notación matricial, la ecuación de la cónica

$$\bar{C} \equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} x_i x_j = 0$$

se puede escribir como sigue

$$\bar{C} \equiv X^T A X = 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

esto es,

$$X \in \bar{C} \iff X^T A X = 0.$$

Más formalmente,

Definición. Dada una forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. La *cónica proyectiva* definida por ω es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, donde se anula ω ; esto es,

$$\bar{C} = \{X \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \mid \omega(X) = 0\}.$$

Y la *cónica afín* definida por ω es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{A}_2$, $\tilde{X} = (1, x_1, x_2)$, donde se anula ω ; esto es,

$$C = \{X \in \mathbb{A}_2 \mid \omega(\tilde{X}) = 0\}.$$

Se tiene $C \subset \bar{C}$.

Recuerdo.

Definición. Una *forma cuadrática* $\omega: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación tal que existe una forma bilineal $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\omega(v) = f(v, v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Resultado. Dada una forma cuadrática ω existe una forma bilineal f tal que:

1. f es simétrica (esto es, $f(u, v) = f(v, u)$)
2. la forma cuadrática asociada a f es ω
3. f es única.

A la única forma bilineal simétrica f cuya forma cuadrática es ω la llamamos la *forma polar* de ω .

La forma polar de una forma cuadrática ω viene dada como sigue:

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(\omega(u + v) - \omega(u) - \omega(v)).$$

Se tiene:

$$\omega(X) = f(X, X).$$

2.1 Puntos singulares

Definición. Sea $\bar{C}$ una cónica proyectiva generada por una forma cuadrática ω , con forma polar f y matriz asociada A .

- Se dice que dos puntos $P, Q \in \mathbb{P}_2$ son *conjugados* si $f(P, Q) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_2$ es un punto *autoconjugado* si $\omega(P) = f(P, P) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_2$ es un *punto singular* de $\bar{C}$ si es conjugado con cualquier punto de $\mathbb{P}_2$; esto es, $f(P, Q) = 0$ para todo punto $Q \in \mathbb{P}_2$. Esto es, si

$$f(P, Q) = P^T A Q = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{P}_2,$$

o equivalentemente,

$$P^T A = 0.$$

- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_2$ es un *punto regular* de $\bar{C}$ si no es un punto singular.
- La cónica $\bar{C}$ es *no degenerada, regular u ordinaria* si no tiene puntos singulares.
- La cónica $\bar{C}$ es *degenerada ó singular* si tiene algún punto singular.

Observaciones: Sea $\bar{C}$ una cónica proyectiva generada por una forma cuadrática ω , con forma polar f y matriz asociada A .

1. Sea $\text{Sing}(\bar{C})$ el conjunto de puntos singulares de $\bar{C}$; esto es,

$$\begin{aligned} \text{Sing}(\bar{C}) &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(X, Y) = 0, \text{ para todo } Y \in \mathbb{P}_2\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid AX = 0\}. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\dim(\text{Sing}(\bar{C})) = 2 - \text{rg}(A).$$

2. Si $X \in \mathbb{P}_2$ es un punto singular, entonces $X \in \bar{C}$.

Demostración. Tenemos que comprobar que $\omega(X) = 0$. Se tiene $\omega(X) = f(X, X) = 0$ pues X es conjugado con cualquier punto, en particular con él mismo.

3. La recta determinada por un punto singular X y un punto cualquiera de la cónica, $Y \in \bar{C}$, está contenida en la cónica.

Demostración. Como X es singular sabemos que $\omega(X) = 0$ y $f(X, Y) = 0$ y como Y pertenece a la cónica $\omega(Y) = 0$. Un punto cualquiera de la recta determinada por X e Y es de la forma $Z = \lambda X + \mu Y$. Tenemos que comprobar que $\omega(Z) = 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\omega(Z) &= \omega(\lambda X + \mu Y) = f(\lambda X + \mu Y, \lambda X + \mu Y) \\ &= f(\lambda X, \lambda X + \mu Y) + f(\mu Y, \lambda X + \mu Y) \\ &= f(\lambda X, \lambda X) + f(\lambda X, \mu Y) + f(\mu Y, \lambda X) + f(\mu Y, \mu Y) \\ &= \lambda^2 f(X, X) + 2\lambda\mu f(X, Y) + \mu^2 f(Y, Y) \\ &= \lambda^2 \underbrace{\omega(X)}_0 + 2\lambda\mu \underbrace{f(X, Y)}_0 + \mu^2 \underbrace{\omega(Y)}_0 = 0.\end{aligned}$$

4. La recta formada por dos puntos singulares tiene todos sus puntos singulares.

Demostración. Sea $Z = \lambda X + \mu Y$ un punto cualquiera de la recta formada por dos puntos singulares X e Y . Tenemos que comprobar que $f(Z, T) = 0$, para todo $T \in \mathbb{P}_2$. Tenemos:

$$\begin{aligned}f(Z, T) &= f(\lambda X + \mu Y, T) \\ &= f(\lambda X, T) + f(\mu Y, T) \\ &= \lambda \underbrace{f(X, T)}_0 + \mu \underbrace{f(Y, T)}_0 = 0.\end{aligned}$$

5. Si la cónica $\bar{C}$ contiene un punto singular, entonces $\bar{C}$ está formada por rectas que pasan por ese punto.

2.2 Polaridad definida por una cónica

Sea $\bar{C}$ una cónica con forma polar f y matriz asociada A . Sea $P \in \mathbb{P}_2$, llamamos *variedad polar* de P respecto de la cónica $\bar{C}$ al conjunto de puntos conjugados de P ; esto es ,

$$V_P = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P, X) = 0\}.$$

Si P es un punto singular, entonces $V_P = \mathbb{P}_2$.

Si P no es un punto singular, entonces V_P es una recta que denotamos r_P y llamamos *recta polar* de P respecto de la cónica $\bar{C}$. Por tanto, la recta polar de un punto $P \in \mathbb{P}_2$ no singular es el conjunto de puntos conjugados con P .

2.2.1 Ecuación de la recta polar

Si P es un punto no singular con coordenadas $[(p_0, p_1, p_2)]$ y la matriz asociada a la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces

$$r_P = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid P^T A X = 0\},$$

esto es,

$$\begin{aligned} 0 = P^T A X &= (p_0, p_1, p_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (p_0 a_{00} + p_1 a_{01} + p_2 a_{02})x_0 + (p_0 a_{01} + p_1 a_{11} + p_2 a_{12})x_1 \\ &\quad + (p_0 a_{02} + p_1 a_{12} + p_2 a_{22})x_2. \end{aligned}$$

2.2.2 Construcción geométrica de la recta polar

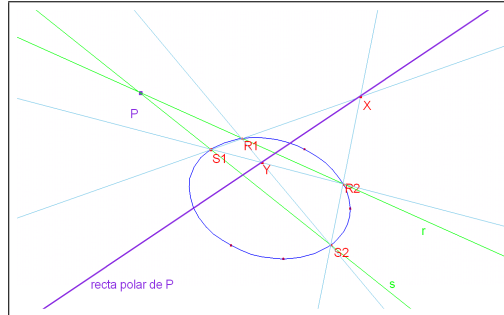
Dados la cónica $\bar{C}$ y un punto $P \in \mathbb{P}_2$ no singular, vamos a obtener la *recta polar* de P respecto de la cónica $\bar{C}$.

Primero, tomamos dos rectas r, s desde P que corten a la cónica en cuatro puntos: R_1, R_2, S_1, S_2 .

La recta polar de P respecto de $\bar{C}$ es la recta de cuartos armónicos de P respecto de los pares de puntos de intersección; esto es, los puntos X tales que $\{P, X; R_1, R_2\} = -1$.

Para obtener los cuartos armónicos, construimos el cuadrángulo completo; esto es, construimos

1. las rectas diagonales del cuadrilátero $R_1 R_2 S_1 S_2$: rectas $R_1 S_1$, $R_2 S_2$, $R_1 S_2$ y $R_2 S_1$,
2. consideramos los puntos de intersección. $X = R_1 S_1 \cap R_2 S_2$, $Y = R_1 S_2 \cap R_2 S_1$.



La polar de P respecto de $\bar{C}$ es la recta XY .

2.2.3 Polo de una recta respecto a una cónica $\bar{C}$

Definición. Dada una recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, llamamos *polo* de la recta r respecto de la cónica $\bar{C}$ al punto cuya recta polar es r ; esto es, $r_P = r$.

Si la ecuación de la recta r es

$$r \equiv u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = U^T X = 0,$$

con $U = (u_0, u_1, u_2)$ y $X = (x_0, x_1, x_2)$,

entonces $r_P = r$ si y sólo si

$$P^T A X = U^T X, \text{ para todo } X \in \mathbb{P}_2$$

ó equivalentemente,

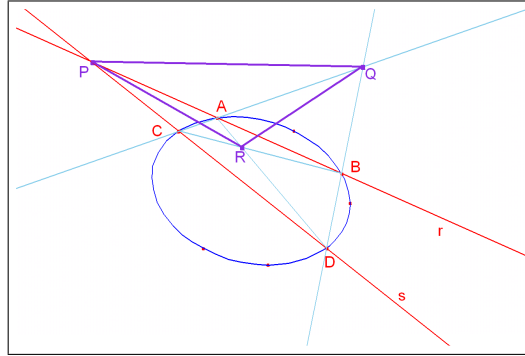
$$P^T A = U^T \iff AP = U.$$

Y si la cónica $\bar{C}$ no es degenerada (por tanto, $\det A \neq 0$), entonces $P = A^{-1}U$.

Teorema. Si la polar de un punto Q pasa por un punto P , entonces la polar de P pasa por el punto Q .

Esto es debido a que la condición de conjugación $f(P; Q) = 0$, es simétrica en P y Q .

Teorema. Si A, B, C, D son cuatro puntos en una cónica $\bar{C}$, entonces el triángulo diagonal (triángulo con vértices P, X, Y , en el dibujo) del cuadrángulo $ABCD$, es autopolar para $\bar{C}$. Esto es, la recta que une XP es la recta polar de Y , la recta que une PY es la recta polar de X , y la recta XY es la recta polar de P .



2.2.4 Polaridad definida por una cónica

Como hemos visto, dada una cónica $\bar{C}$ a cada punto P no singular se le asigna una recta (su recta polar) y recíprocamente, a cada recta r se le asigna un punto (su polo).

Definición. Se llama *polaridad definida por una cónica $\bar{C}$* a la aplicación que a cada punto no singular de $\mathbb{P}_2$ le hace corresponder su recta polar. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2 \setminus \text{Sing}(\bar{C}) &\longrightarrow \text{Rectas de } \mathbb{P}_2 \\ P &\longmapsto r_P \end{aligned}$$

Teorema de la polaridad definida por una cónica regular.

Las rectas polares de los puntos de una recta r de $\mathbb{P}_2$, respecto de una cónica regular $\bar{C}$, pasan todas por un mismo punto que es precisamente el polo de r .

2.3 Intersección de recta y cónica

Sea $\bar{C}$ una cónica proyectiva con forma polar f y matriz asociada A y sea r una recta proyectiva que contiene a los puntos $P = [(p_0, p_1, p_2)]$ y $Q = [(q_0, q_1, q_2)]$. Un punto $X \in \mathbb{P}_2$ está en la intersección de la cónica y la recta si y sólo si:

$$\begin{cases} X \in r \\ X \in \bar{C} \end{cases} \iff \begin{cases} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(X) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(\lambda P + \mu Q) = 0 \end{cases}$$

La condición $\omega(\lambda P + \mu Q) = 0$ se escribe:

$$0 = \lambda^2 \omega(P) + 2\lambda\mu f(P, Q) + \mu^2 \omega(Q).$$

Dividiendo la ecuación anterior por μ^2 y escribiendo $t = \lambda/\mu$ se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$0 = \omega(P)t^2 + 2f(P, Q)t + \omega(Q)$$

con discriminante

$$\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q).$$

- Si $f(P, Q) = 0$, $\omega(P) = 0$ y $\omega(Q) = 0$, entonces $P, Q \in \bar{C}$ y, por tanto, $r \subset \bar{C}$. Luego la cónica está formada por rectas.
- Si no todos los coeficientes de la ecuación de segundo grado $0 = \omega(P)t^2 + 2f(P, Q)t + \omega(Q)$ son nulos, entonces hay dos puntos de corte (las dos soluciones de la ecuación).
 1. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) > 0$, la recta y la cónica se cortan en dos puntos reales distintos. La recta se dice que es una *recta secante* a la cónica.
 2. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) = 0$, la recta y la cónica se cortan en un punto doble. La recta se dice que es una *recta tangente* a la cónica.
 3. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) < 0$, la recta y la cónica se cortan en dos puntos imaginarios distintos. La recta se dice que es una *recta exterior* a la cónica.

2.3.1 Variedad tangente a una cónica

Definición. La *variedad tangente* a una cónica $\bar{C}$ en un punto $P \in \bar{C}$, es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_2$ tales que la recta que une P y X es tangente a la cónica $\bar{C}$; esto es,

$$\begin{aligned} T_P \bar{C} &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \Delta = f(P, X)^2 - \omega(P)\omega(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P, X) = 0\}. \end{aligned}$$

Observaciones.

1. Si $P \in \bar{C}$ es un punto regular, entonces $T_P\bar{C}$ es una recta y, de hecho, es la recta polar del punto P ; esto es, $T_P\bar{C} = r_P$.
2. Si $P \in \bar{C}$ es un punto singular, entonces $T_P\bar{C} = \mathbb{P}_2$.
3. Si $P \notin \bar{C}$, podemos definir la *variedad tangente* a $\bar{C}$ en $P \notin \bar{C}$ como el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_2$ tales que la recta que une P y X es tangente a la cónica $\bar{C}$; esto es,

$$\begin{aligned} T_P\bar{C} &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \text{recta } XP \text{ es tangente a } \bar{C}\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \Delta = f(P, X)^2 - \omega(P)\omega(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P, X)^2 = \omega(P)\omega(X)\}. \end{aligned}$$

Y se cumple que $T_P\bar{C}$ es una cónica degenerada que tiene a P como punto singular.

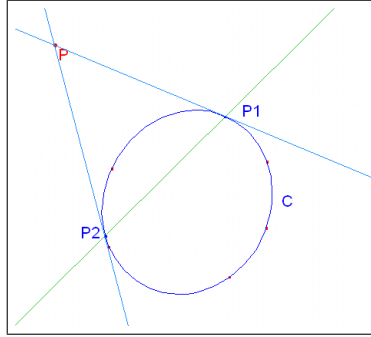
Construcción geométrica de $T_P\bar{C}$ cuando $P \notin \bar{C}$

Tenemos $T_P\bar{C} = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \text{recta } XP \text{ es tangente a } \bar{C}\}$. Calculamos la recta polar de P ,

$$r_P = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P, X) = 0\}$$

y hallamos la intersección de r_P y $\bar{C}$.

Si $r_P \cap \bar{C} = \{P_1, P_2\}$, entonces $T_P\bar{C} = r_{P_1} \cup r_{P_2}$.



Si $r_P \cap \bar{C}$ son dos puntos imaginarios; esto es, la recta r_P es exterior a la cónica $\bar{C}$ y el punto P es un punto interior a la cónica y desde él no se puede lanzar ninguna tangente.

2.4 Clasificación de las cónicas

Sea $\bar{C}$ una cónica con matriz asociada A .

rango A	sign (A)	Cónica	Ecuación canónica
3	3	cónica no degenerada vacía	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$
3	1	cónica no degenerada no vacía	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$
2	2	punto singular	$x_0^2 + x_1^2 = 0$
2	0	par de rectas	$x_0^2 - x_1^2 = 0$
1	1	recta doble	$(ax_0 + bx_1 + cx_2)^2 = 1$

Nota: Llamamos *signatura* de A y lo denotamos $\text{sign}(A)$ a $|\alpha - \beta|$ donde $\alpha = n^\circ$ de autovalores positivos de A y $\beta = n^\circ$ de autovalores positivos de A .

2.5 Clasificación afín y elementos notables de las cónicas

Sea $\bar{\mathbb{A}}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ el plano afín proyectivizado, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$. Y sea ω una forma cuadrática con matriz asociada A . Sea

$$\bar{C} = \{X \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \mid \omega(X) = 0\}$$

una cónica proyectiva con cónica afín

$$C = \bar{C} \cap \mathbb{A}_2 = \{X \in \mathbb{A}_2 \mid \omega(\tilde{X}) = 0\}, \text{ donde } \tilde{X} = (1, x_1, x_2).$$

2.5.1 Centro de una cónica afín

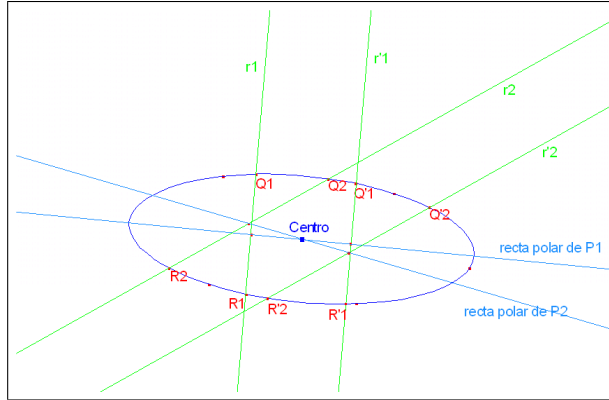
Definición: Se llama *centro* de una cónica afín C al polo de la recta del infinito si ese punto es un punto propio (si no lo es, se dice que la cónica afín no tiene centro propio).

La ecuación de la recta del infinito es $x_0 = 0$ y la ecuación de la cónica es $X^t A X = 0$. Por tanto, el polo de la recta del infinito es el punto P tal que $P^t A = (1, 0, 0)$.

Ejemplo. La parábola es tangente al infinito: por tanto, el polo de la recta del infinito es el punto de tangencia, que está en el infinito, así que la parábola no tiene centro propio.

Proposición. El centro de una cónica afín es centro de simetría.

Construcción geométrica del centro de una cónica.



El centro es el polo de la recta del infinito, por tanto, es la intersección de las rectas polares de puntos del infinito.

1. Tomamos un punto del infinito P_1 y hallamos su recta polar de la siguiente manera:

- (a) Trazamos dos rectas paralelas r_1 y r'_1 que corten a la cónica (tienen punto del infinito P_1).
 - (b) Hallamos los puntos medios de los segmentos Q_1R_1 y $Q'_1R'_1$. Dichos puntos medios son los cuartos armónicos de Q_1, R_1, P_1 y Q'_1, R'_1, P_1 respectivamente.
 - (c) La recta polar de P_1 es la recta que une dichos puntos medios.
2. Repetimos la construcción para trazar la recta polar de un punto del infinito P_2 .
 3. El centro de la cónica es el punto de intersección de dichas rectas polares.

2.6 Posición relativa de la cónica y la recta del infinito

1. Si la recta del infinito $r_\infty \equiv x_0 = 0$ no es tangente a la cónica $\bar{C}$ entonces el polo de r_∞ es un punto propio; $\bar{C}$ tiene centro que denotamos C y las coordenadas del centro son

$$Z = [(c_0, c_1, c_2)] \text{ tales que } (c_0, c_1, c_2)A = (1, 0, 0).$$

2. Si la recta del infinito $r_\infty \equiv x_0 = 0$ es tangente a la cónica $\bar{C}$ entonces el polo de r_∞ , si existe, es el punto de tangencia. En este caso,

$$\bar{C} \cap r_\infty = \{\text{centro}\}$$

y el centro es un *punto doble*. Si la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{C} \cap r_\infty &\equiv \begin{cases} a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

se tiene la ecuación de segundo grado $a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} = 0$ con discriminante:

$$\Delta_{00} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A_{00})$$

donde

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

- Si $\det A_{00} = 0$, entonces $\bar{C} \cap r_\infty = \{P\}$, donde P es un punto doble, el centro impropio de la cónica.

- Si $\det A_{00} \neq 0$, entonces $\bar{C}$ tiene centro propio que es el centro de simetría de la cónica. Cualquier recta que pasa por el centro corta a la cónica en dos puntos que son simétricos respecto del centro.

Por tanto, se pueden dar los siguientes casos:

$$\bar{C} \cap r_\infty = \begin{cases} 2 \text{ puntos reales distintos } (\det(A_{00}) < 0) \\ 2 \text{ puntos imaginarios conjugados } (\det(A_{00}) > 0) \\ 1 \text{ punto } (\det(A_{00}) = 0) \end{cases}$$

2.6.1 Cónicas de tipo parabólico

Se tiene que: $\bar{C} \cap r_\infty = \{P\}$, P punto doble si y sólo si $\det A_{00} = 0$.

El centro de la cónica es un punto impropio.

- Si $\det A \neq 0$ la cónica es una *parábola*.
- Si $\det A = 0$ la cónica es un *par de rectas paralelas* $\begin{cases} \text{distintas si } \text{rg } A = 2 \\ \text{recta doble si } \text{rg } A = 1 \end{cases}$

2.6.2 Cónicas de tipo elíptico

Se tiene que: $\bar{C} \cap r_\infty = \{P_1, P_2\}$, P_1, P_2 puntos imaginarios conjugados si y sólo si $\det A_{00} > 0$.

El centro de la cónica es un punto propio.

- Si $\det A \neq 0$ la cónica es una *elipse*.
- Si $\det A = 0$ la cónica es un *par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real* (el punto singular de la cónica).

2.6.3 Cónicas de tipo hiperbólico

Se tiene que: $\bar{C} \cap r_\infty = \{P_1, P_2\}$, P_1, P_2 puntos reales distintos si y sólo si $\det A_{00} < 0$.

El centro de la cónica es un punto propio.

- Si $\det A \neq 0$ la cónica es una *hipérbola*.
- Si $\det A = 0$ la cónica es un *par de rectas reales que se cortan en el punto singular*

2.6.4 Elementos notables de las cónicas

Sea la cónica $\bar{C} \equiv X^t A X = 0$, con $A^t = A$ una cónica regular.

Centro Definimos *centro* de la cónica $\bar{C}$ al polo de la recta impropia (es el centro de simetría de la cónica).

Diámetros y diámetros conjugados Dos rectas r y s se dicen *conjugadas* con respecto a una cónica regular $\bar{C}$ cuando cada una de ellas contiene al polo de la otra.

Definimos *diámetro de la cónica* $\bar{C}$ a toda recta tal que su polo es un punto impropio.

Por tanto, para cada punto impropio tenemos un diámetro.

En virtud del Teorema fundamental de la polaridad, todos los diámetros por ser rectas polares de puntos impropios pasan por el polo de la recta impropia; es decir, pasan por el centro.

Dos diámetros d_P y d_Q diremos que son *conjugados* cuando cada uno de ellos contiene al polo del otro.

Asíntotas Se llama *asíntota* de una cónica, cuando la tiene, a todo diámetro que es tangente a la cónica. Por tanto, las asíntotas son las rectas polares de los puntos impropios de la cónica.

Ejes en las cónicas regulares Dos rectas $r' \equiv a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ y $s' \equiv b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ con $a_1 \neq 0$ ó $a_2 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$ ó $b_2 \neq 0$ diremos que son *ortogonales* en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ si $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

Se llaman *ejes de una cónica regulares* a aquellos diámetros que siendo conjugados son además ortogonales.

Veamos cómo obtener los ejes:

Sean $P[0, p_1, p_2]$ y $Q[0, q_1, q_2]$ los puntos impropios de los ejes. Como los ejes son rectas ortogonales P y Q se cumple: $p_1q_1 + p_2q_2 = 0$. Y por otra parte, como P y Q son los puntos impropios de rectas conjugadas, deben ser puntos conjugados; esto es, $P^tAQ = 0$. Por tanto, se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} p_1q_1 + p_2q_2 = 0 \\ (0, p_1, p_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} p_1q_1 + p_2q_2 = 0 \\ (p_1a_{11} + p_2a_{12})q_1 + (p_1a_{12} + p_2a_{22})q_2 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1a_{11} + p_2a_{12} & p_1a_{12} + p_2a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

El sistema anterior tiene solución distinta de la trivial si la matriz de coeficientes tiene determinante cero; esto es, si las filas de la matriz de coeficientes son proporcionales:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \lambda p_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \lambda p_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 = 0 \\ a_{12}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 = 0 \end{cases}$$

El sistema anterior tiene solución $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$ si

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A_{00} = 0$$

Nótese que es la ecuación característica de la matriz A_{00} que es diagonalizable.

Nota: Si (v_1, v_2) es autovector asociado al autovalor λ_1 de A_{00} entonces $Q[0, v_1, v_2]$ y $P[0, -v_2, v_1]$ satisfacen el sistema

$$\begin{cases} p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0 \\ P^t A Q = 0 \end{cases}$$

luego sus rectas polares son los ejes de la cónica $\bar{C}$.

Por último, llamamos *vértices* de una cónica $\bar{C}$ a los puntos de intersección los ejes de la cónica con la cónica.

Ejemplo 1 Sea la cónica $\bar{C} \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0$. Se pide:

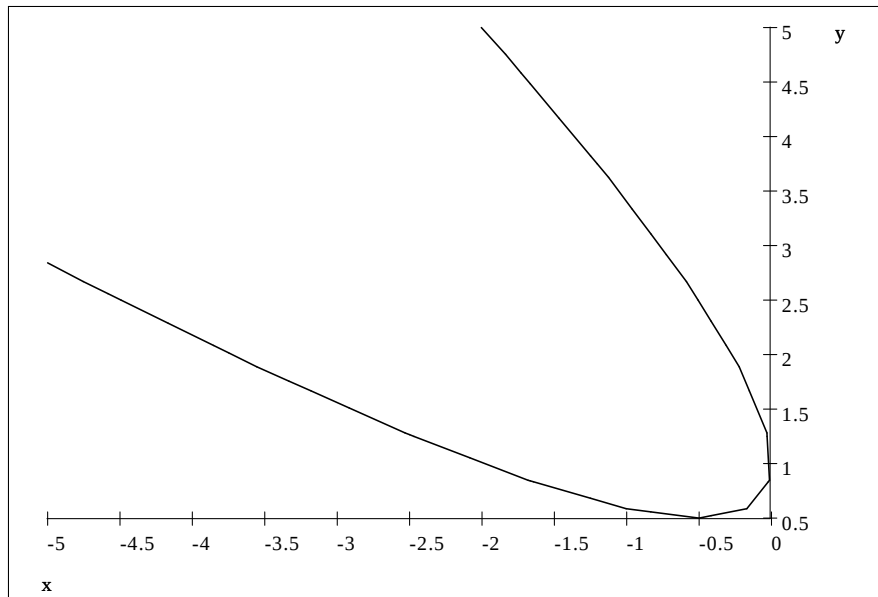
1. Vamos a calcular el diámetro conjugado de la recta $r \equiv x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$. ¿Es r un eje de la cónica?
2. Calcular los ejes de la cónica y representarlos en el plano afín junto con la cónica afín.
3. Hallar el centro de la cónica.
4. Calcular los vértices de la cónica.

Clasificación:

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -1 \neq 0$, ($\bar{C}$ es una cónica regular) y como $\det A_{00} = 0$, la cónica afín C es una parábola.



El punto impropio de la recta $r \equiv x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$ satisface la ecuación $x_1 + 2x_2 = 0$ por tanto tiene coordenadas homogéneas $P[0, -2, 1]$. La recta polar de P es el diámetro conjugado de r ; esto es,

$$\begin{aligned} r_P &\equiv (0, -2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ r_P &\equiv x_0 + x_1 + x_2 = 0. \end{aligned}$$

Nótese que los puntos impropios de r y r_P ; $P[0, -2, 1]$ y $Q[0, 1, -1]$ respectivamente, son puntos conjugados: $P^t A Q = 0$ pero r y r_P no son rectas ortogonales pues $-2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \neq 0$.

Los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Y los autovectores asociados a dichos autovalores son:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (-1, 1) \text{ autovector asociado a } \lambda = 0 \\ \vec{v}_2 &= (1, 1) \text{ autovector asociado a } \lambda = 2 \end{aligned}$$

Por tanto los ejes de la cónica son las rectas polares de los puntos impropios $P_1[0, -1, 1]$ y $P_2[0, 1, 1]$; esto es,

$$\begin{aligned} r_{P_1} &\equiv (0, -1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ r_{P_2} &\equiv (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, los ejes de la cónica son

$$\begin{aligned} r_{P_1} &\equiv x_0 = 0, \\ r_{P_2} &\equiv -x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Los diámetros de la cónica se cortan en el centro; en particular, el centro es el punto de intersección de los ejes de la cónica:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ -x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff Z[0, -1, 1]$$

La parábola tiene centro impropio.

Los vértices de la cónica son los puntos de intersección de la cónica con sus ejes. Como $\tilde{C}$ es una parábola, tiene un punto impropio que es precisamente el centro Z y también es un vértice de la parábola (el vértice impropio):

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \iff Z[0, -1, 1]$$

El otro vértice es la intersección de la parábola con su eje propio:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 2x_1x_2 = 0 \\ -1 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_2 = 0 \\ 1 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{4} - 2x_2 = 0 \\ 1 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_2 = \frac{5}{8} \\ x_1 = \frac{1}{2} - x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow V \left[1, -\frac{1}{8}, \frac{5}{8} \right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Sea la cónica $\bar{C} \equiv x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$. Se pide:

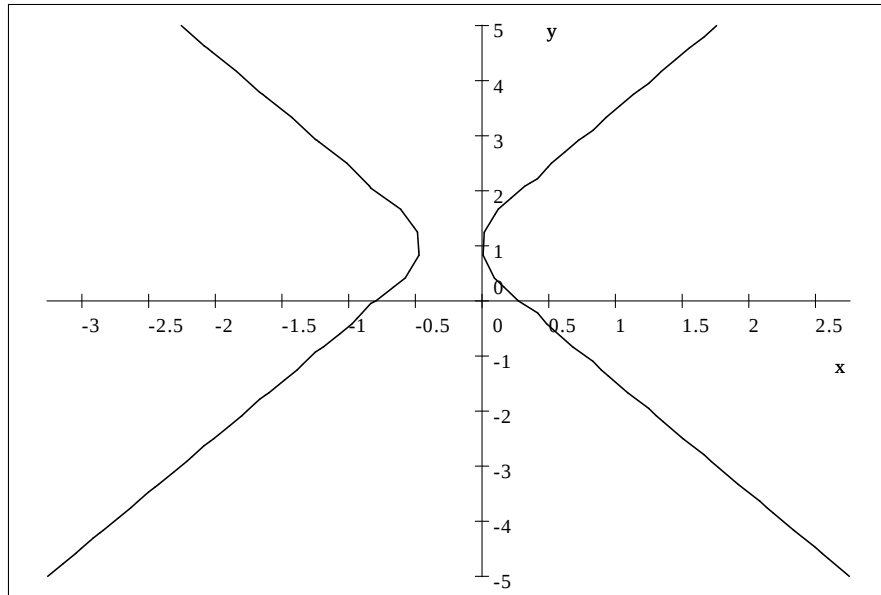
1. Clasificar la cónica.
2. Calcular las asíntotas de la cónica.
3. Calcular los ejes de la cónica.
4. Hallar el centro de la cónica.
5. Calcular los vértices de la cónica.

Clasificación:

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -1 \neq 0$, ($\bar{C}$ es una cónica regular) y como $\det A_{00} = -4 < 0$, la cónica es una hipérbola.



Los puntos impropios de la hipérbola satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -4x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 + 2x_1)(x_2 - 2x_1) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & P_1[0, 1, -2] \text{ y } P_2[0, 1, 2] \end{aligned}$$

Por tanto, las asíntotas de la cónica son:

$$\begin{aligned} r_{P_1} & \equiv P_1^t AX = x_0 - 4x_1 - 2x_2 = 0, \\ r_{P_2} & \equiv P_2^t AX = -3x_0 - 4x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Para calcular los ejes calculamos los autovectores de la matriz A_{00} . Los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$. Y los autovectores asociados a dichos autovalores son:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (1, 0) \text{ autovector asociado a } \lambda = -4 \\ \vec{v}_2 &= (0, 1) \text{ autovector asociado a } \lambda = 1 \end{aligned}$$

Por tanto los ejes de la cónica son las rectas polares de los puntos impropios $Q_1[0, 1, 0]$ y $Q_2[0, 0, 1]$; esto es,

$$\begin{aligned} r_{Q_1} & \equiv (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_0 - 4x_1 = 0 \\ r_{Q_2} & \equiv (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_0 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

El centro de la cónica es el punto de intersección de los ejes. Como C es una hipérbola, su centro es un punto propio y sus coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} 1 + 4x_1 = 0 \\ 1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Z \left[1, -\frac{1}{4}, 1 \right]$$

Los vértices de la cónica son los puntos de intersección de la cónica con sus ejes. Por tanto,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0 \\ -x_0 - 4x_1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 16x_1^2 - 4x_1^2 + x_2^2 + 8x_1^2 + 8x_1x_2 = 0 \\ x_0 = -4x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = 0 \\ x_0 = -4x_1 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow_{t=x_2/x_1} \begin{cases} 20 + 8t + t^2 = 0 \\ x_0 = -4x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como $20 + 8t + t^2 = 0$ no tiene soluciones reales, el eje $-x_0 - 4x_1 = 0$ de la cónica corta a la cónica en puntos imaginarios. Veamos la intersección de la cónica con el otro eje:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0 \\ -x_0 + x_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4x_1^2 + 2x_2x_1 = 0 \\ -x_0 + x_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2(2x_1 + x_2)x_1 = 0 \\ -x_0 + x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto $V_1[1, 0, 1]$ y $V_2[1, -1/2, 1]$ son los dos vértices propios y reales de la hipérbola.

2.7 Invariantes métricos de una cónica

Sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ y $\mathcal{R}' = \{\mathcal{O}', B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)\}$ dos referencias ortonormales del plano afín $\mathbb{A}_2$. Sea C una cónica del plano afín euclídeo con matriz asociada A respecto de la referencia $\mathcal{R}$ y matriz B respecto de la referencia $\mathcal{R}'$, es decir,

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{R}} &\equiv (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ C_{\mathcal{R}'} &\equiv (x'_0, x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & b_{11} & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

entonces, se cumple

$$\det(A) = \det(B)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \det A_{00} = \det B_{00} \\ a_{11} + a_{22} = b_{11} + b_{22} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Los autovalores de } A_{00} \\ \text{y } B_{00} \text{ coinciden.} \end{array} \right.$$

siendo

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } B_{00} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

2.8 Forma reducida de una cónica regular

Sea C una cónica que respecto de una referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ tiene por ecuación: $C_{\mathcal{R}} \equiv X^T A X = 0$.

2.8.1 Cónicas con centro propio: hipérbolas y elipses

Si $\det(A_{00}) \neq 0$ entonces existe una referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{\mathcal{O}', B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)\}$ tal que la expresión matricial de la cónica en la nueva referencia es:

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv (x'_0, x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} d_{00} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = 0$$

La ecuación $C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{00}(x'_0)^2 + d_{11}(x'_1)^2 + d_{22}(x'_2)^2 = 0$ se denomina *ecuación reducida de la cónica*, donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}' \text{ es el } \textit{centro} \text{ de la cónica} \\ d_{11}, d_{22} \text{ son los autovalores de } A_{00} \\ \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \text{ vectores propios de } A_{00} \quad (\text{vectores de dirección de los ejes de } C) \\ d_{00} \text{ cumple } \det(A) = d_{00}d_{11}d_{22} \end{array} \right.$$

Ejemplo 1 Sea la cónica $\bar{C} \equiv 2x_0x_2 - 2x_1x_2 - x_0^2 + 7x_1^2 + 7x_2^2 = 0$.

Clasificación:

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -55 \neq 0$, por tanto, es una cónica regular. Los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$ (por tanto, $\det A_{00} = \lambda_1\lambda_2 = 48 > 0$). La cónica C es una elipse.

Elementos notables:

El *centro* de la elipse es un punto propio que no pertenece a la cónica. Tenemos:

$$P = A^{-1}U \text{ siendo } U[1, 0, 0]$$

luego

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{48}{55} \\ \frac{1}{55} \\ \frac{7}{55} \end{pmatrix}.$$

Esto es

$$\text{Centro} \equiv \left[\left(-\frac{48}{55}, \frac{1}{55}, \frac{7}{55} \right) \right] = \left[\left(1, -\frac{1}{48}, -\frac{7}{48} \right) \right]$$

Los *diámetros* de la elipse son las rectas que pasan por su centro. La familia de diámetros es

$$\begin{vmatrix} x_0 & -\frac{48}{55} & 0 \\ x_1 & \frac{1}{55} & a \\ x_2 & \frac{7}{55} & b \end{vmatrix} = \frac{1}{55} (b - 7a) x_0 + \frac{48}{55} bx_1 - \frac{48}{55} ax_2 = 0,$$

esto es, $d_{a,b} \equiv (b - 7a) x_0 + 48bx_1 - 48ax_2 = 0$.

Análogamente son las rectas polares de puntos impropios. Si $P_\infty = [(0, \alpha, \beta)] \in r_\infty$, entonces su recta polar vtiene la siguiente ecuación

$$r_{P_\infty} \equiv (0, \alpha, \beta) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

esto es, $d_{P_\infty} \equiv \beta x_0 + (7\alpha - \beta) x_1 + (7\beta - \alpha) x_2$.

Nótese que si tomamos $\alpha = 7b - a$ y $\beta = b - 7a$, se cumple: $d_{P_\infty} \equiv d_{a,b}$.

La elipse no tiene *asíntotas* ya que todos sus puntos son propios.

Los *ejes* de la elipse pasan por el centro y tienen direcciones dadas por dos vectores propios ortogonales. Los vectores propios de C son:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 1) \text{ autovector asociado a } \lambda_1 = 6, \\ \vec{e}_2 &= (-1, 1) \text{ autovector asociado a } \lambda_2 = 8, \end{aligned}$$

por tanto, los ejes son:

$$\begin{aligned} \text{Eje 1} &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & \frac{1}{-48} & 1 \\ x_2 & \frac{7}{-48} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}x_0 - x_1 + x_2 = 0, \\ \text{Eje 2} &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & \frac{1}{-48} & -1 \\ x_2 & \frac{7}{-48} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}x_0 - x_1 - x_2 = 0. \end{aligned}$$

Los *vértices* son los puntos de intersección de la elipse con sus ejes. Como todos los puntos de la elipse son puntos propios, busquemos los vértices en $x_0 = 1$, esto es, planteamos los sistemas

$$\begin{aligned} \bar{C} \cap \text{Eje 1} &\equiv \begin{cases} 2x_0x_2 - 2x_1x_2 - x_0^2 + 7x_1^2 + 7x_2^2 \\ \frac{1}{8}x_0 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \\ \bar{C} \cap \text{Eje 2} &\equiv \begin{cases} 2x_0x_2 - 2x_1x_2 - x_0^2 + 7x_1^2 + 7x_2^2 \\ -\frac{1}{6}x_0 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

para $x_0 = 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x_2 - 2x_1x_2 - 1 + 7x_1^2 + 7x_2^2 \\ \frac{1}{8} - x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow V_1^\pm &= \left[\left(1, -\frac{1}{48} \pm \frac{1}{24}\sqrt{55}, -\frac{7}{48} \pm \frac{1}{24}\sqrt{55} \right) \right] \\ &\begin{cases} 2x_2 - 2x_1x_2 - 1 + 7x_1^2 + 7x_2^2 \\ -\frac{1}{6} - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow V_2^\pm &= \left[\left(1, -\frac{1}{48} \pm \frac{1}{48}\sqrt{165}, -\frac{7}{48} \mp \frac{1}{48}\sqrt{165} \right) \right]. \end{aligned}$$

Forma reducida: La ecuación reducida de la elipse es

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{00}(x'_0)^2 + d_{11}(x'_1)^2 + d_{22}(x'_2)^2 = 0,$$

donde $d_{11} = 6$, $d_{22} = 8$ y como $\det(A) = -55 = d_{00}d_{11}d_{22} = d_{00}48$, entonces $d_{00} = -55/48$. Por tanto,

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv \frac{-55}{48}(x'_0)^2 + 6(x'_1)^2 + 8(x'_2)^2 = 0,$$

siendo el origen de la referencia $\mathcal{R}'$, el centro de la cónica: $\mathcal{O}' = (-\frac{1}{48}, -\frac{7}{48})$ y la base es

$$B' = \left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|} \right) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Utilizando la matriz del cambio de referencia resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{48} & -\frac{7}{48} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{48} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{55}{48} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2 Sea la cónica $\bar{C} \equiv 11x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_0x_2 + 3x_1x_2 = 0$.

Clasificación:

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -6 \neq 0$ (es una cónica regular) y los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; por tanto, $\det A_{00} = -2 < 0$. La cónica C es una hipérbola.

Elementos notables:

El *centro* de la hipérbola es un punto propio que no pertenece a la cónica. Tenemos:

$$P = A^{-1}U \text{ siendo } U[(1, 0, 0)]$$

luego

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

El centro es

$$Z \equiv \left[\left(\frac{1}{3}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{3}\sqrt{2} \right) \right] = \left[(1, -3\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \right].$$

Los *diámetros* de la hipérbola son las rectas que pasan por su centro (las rectas polares de puntos impropios). La familia de diámetros es

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & -3\sqrt{2} & a \\ x_2 & -\sqrt{2} & b \end{vmatrix} = \sqrt{2}(a - 3b)x_0 - bx_1 + ax_2 = 0,$$

esto es, $d_{a,b} \equiv \sqrt{2}(a - 3b)x_0 - bx_1 + ax_2 = 0$.

La hipérbola tiene dos *asíntotas* que son las tangentes a la hipérbola en sus puntos impropios. Los puntos impropios de la hipérbola son:

$$P \in \bar{C} \cap r_\infty \implies \begin{cases} -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} P_1 [(0, 1, 3 - 2\sqrt{2})] \\ P_2 [(0, 1, 3 + 2\sqrt{2})] \end{cases}$$

La polar de P_1 es:

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv (0, 1, 3 - 2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \implies r_1 &\equiv (12\sqrt{2} - 16)x_0 + (4 - 3\sqrt{2})x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0, \end{aligned}$$

y la polar de P_2 es:

$$\begin{aligned} r_2 &\equiv (0, 1, 3 + 2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \implies r_2 &\equiv (16 + 12\sqrt{2})x_0 + (4 + 3\sqrt{2})x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, las asíntotas de la hipérbola son

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv (12\sqrt{2} - 16)x_0 + (4 - 3\sqrt{2})x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0, \\ r_2 &\equiv (16 + 12\sqrt{2})x_0 + (4 + 3\sqrt{2})x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0. \end{aligned}$$

Nótese que para $a = 1$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} d_{1,3-2\sqrt{2}} &\equiv \sqrt{2} \left((1 - 3(3 - 2\sqrt{2}))x_0 - (3 - 2\sqrt{2})x_1 + x_2 \right) = 0, \\ &\equiv (12 - 8\sqrt{2})x_0 - (3 - 2\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ &\equiv \sqrt{2} \left((12 - 8\sqrt{2})x_0 - (3 - 2\sqrt{2})x_1 + x_2 \right) = 0 \\ &\equiv ((12\sqrt{2} - 16)x_0 + (4 - 3\sqrt{2})x_1 + \sqrt{2}x_2) = 0 \\ &\equiv r_1 \end{aligned}$$

y para $a = 1$ y $b = 3 + 2\sqrt{2}$ se tiene: $d_{1,3+2\sqrt{2}} \equiv r_1$.

Los *ejes* de la hipérbola pasan por el centro y tienen direcciones dadas por dos vectores propios ortogonales. Los vectores propios de C son:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 1) \text{ autovector asociado a } \lambda_1 = 1, \\ \vec{e}_2 &= (-1, 1) \text{ autovector asociado a } \lambda_2 = -2, \end{aligned}$$

por tanto, los ejes son:

$$\begin{aligned} \text{Eje 1} &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & -3\sqrt{2} & 1 \\ x_2 & -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 - 2x_0\sqrt{2} = 0, \\ \text{Eje 2} &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & -3\sqrt{2} & -1 \\ x_2 & -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = -x_1 - x_2 - 4x_0\sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

Los *vertices* son los puntos de intersección de la hipérbola con sus ejes

$$\begin{aligned} \bar{C} \cap \text{Eje 1} &\equiv \begin{cases} 11x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_0x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 - 2x_0\sqrt{2} = 0 \end{cases} \\ \bar{C} \cap \text{Eje 2} &\equiv \begin{cases} 11x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_0x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4x_0\sqrt{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $x_0 = 1$, entonces

$$\begin{cases} 11 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \text{no hay solución real}$$

$$\begin{cases} 11 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2 = \left[\left(1, -1 - 2\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{31 - 16\sqrt{2}}, 1 - 2\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{31 - 16\sqrt{2}} \right) \right]$$

Forma reducida: La ecuación reducida de esta hipérbola es

$$d_{00}(x'_0)^2 + d_{11}(x'_1)^2 + d_{22}(x'_2)^2 = 0$$

donde $d_{11} = 1$, $d_{22} = -2$ y como $\det(A) = -6 = d_{00}d_{11}d_{22} = -2d_{00}$, entonces $d_{00} = 3$. Por tanto,

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv 3(x'_0)^2 + (x'_1)^2 - 2(x'_2)^2 = 0,$$

siendo el origen de la referencia $\mathcal{R}'$, el centro de la cónica: $\mathcal{O}' = (-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y la base es

$$B' = \left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|} \right) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Utilizando la matriz del cambio de referencia resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.8.2 Cónicas con centro impropio: parábolas

Si $\det(A_{00}) = 0$ entonces existe una referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{\mathcal{O}', B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)\}$ tal que la expresión matricial de la cónica en la nueva referencia es:

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv (x'_0, x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{02} \\ 0 & d_{11} & 0 \\ d_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = 0.$$

La ecuación $C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{11}(x'_1)^2 + 2d_{02}x'_0x'_2 = 0$ se denomina *ecuación reducida de la cónica*, donde

$$\begin{cases} \mathcal{O}' \text{ es el } \textit{vértice} \text{ de la parábola} \\ d_{11}, 0 \text{ son los autovalores de } A_{00} \\ \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \text{ vectores propios asociados a } d_{11}, 0 \text{ resp.} \end{cases}$$

Si cambiamos el orden de los vectores, la matriz que se obtiene es

$$\begin{pmatrix} 0 & d_{01} & 0 \\ d_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo Sea la cónica $\bar{C} \equiv -2x_0x_2 + 4x_1x_2 + x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Clasificación:

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -4 \neq 0$ (es una cónica regular) y los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ (por tanto, $\det A_{00} = \lambda_1\lambda_2 = 0$). La cónica $\bar{C}$ es una parábola.

Elementos notables:

El *centro* de la parábola (el polo de la recta del infinito) es un punto impropio que pertenece a la cónica. Se tiene:

$$\bar{C} \cap r_\infty \equiv 4x_1x_2 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0 \xRightarrow{t=x_2/x_1} 4t+4+t^2=0 \implies t=-2 \implies Z[(0,1,-2)]$$

Los *diámetros* de la parábola son todas las rectas que pasan por su centro (rectas polares de puntos impropios). Tienen la dirección del vector $(0,1,-2)$, por tanto,

$$\text{Familia de diámetros } d_a \equiv ax_0 + 2x_1 + x_2 = 0.$$

La *asíntota* de la parábola (recta tangente en su punto impropio) es la recta impropia: $x_0 = 0$.

La parábola tiene un único *eje propio*. Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (2,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_2 = 5, \\ \vec{e}_2 &= (-1/2,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_1 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el eje propio de la parábola es la recta polar del punto: $P[(0,2,1)]$; esto es

$$\text{Eje} \equiv (0,2,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies \text{Eje} \equiv -x_0 + 10x_1 + 5x_2 = 0.$$

El *vértice* es la intersección de la parábola con su eje:

$$\bar{C} \cap \text{Eje} \equiv \begin{cases} -2x_0x_2 + 4x_1x_2 + x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ -x_0 + 10x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

En $x_0 = 1$

$$\begin{cases} -2x_2 + 4x_1x_2 + 1 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ -1 + 10x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \implies V \left[\left(1, -\frac{4}{25}, \frac{13}{25} \right) \right]$$

Forma reducida: La ecuación reducida de esta parábola es

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{11}(x'_1)^2 + 2d_{02}x'_0x'_2 = 0$$

donde $d_{11} = 5$ y como $\det(A) = -4 = (d_{02})^2 d_{11}$ entonces $(d_{02})^2 = 4/5$. Por tanto,

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv 5(x'_1)^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'_0x'_2 = 0,$$

siendo el origen de la referencia $\mathcal{R}'$ el vértice de la parábola: $\mathcal{O}' = (-\frac{4}{25}, \frac{13}{25})$, y la base es

$$B' = \left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|} \right) = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right).$$

Utilizando la matriz del cambio de referencia resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{25} & \frac{13}{25} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{25} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{13}{25} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Haces de cónicas

Como sabemos si r_1, r_2 son dos rectas distintas del plano, la ecuación

$$\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$$

es la ecuación del haz de rectas que pasan por el único punto común de r_1 y r_2 .

Si ahora consideramos cónicas en lugar de rectas, la situación es algo diferente.

Definición. Dadas dos cónicas $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \subset \mathbb{P}_2$ definidas por las formas cuadráticas $\omega_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\omega_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ resp., con ecuaciones: $\bar{C}_1 \equiv X^t A_1 X = 0$ y $\bar{C}_2 \equiv X^t A_2 X = 0$, se llama *haz de cónicas determinado por $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$* a la familia de cónicas determinadas por la formas cuadráticas:

$$\lambda \omega_1 + \mu \omega_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

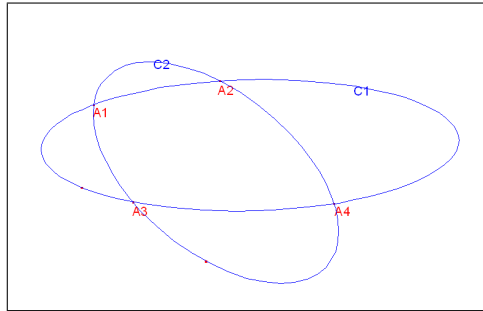
La ecuación de una cónica del haz es:

$$\bar{C}_{\lambda, \mu} \equiv X^t (\lambda A_1 + \mu A_2) X = 0, \quad X \in \mathbb{P}_2.$$

A esta familia de cónicas pertenecen, en particular, las cónicas $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$, pues basta darle a los parámetros los valores $\lambda = 1, \mu = 0$ y $\lambda = 0, \mu = 1$, respectivamente.

Como las ecuaciones $X^t A_1 X = 0$ y $X^t A_2 X = 0$ son ambas cuadráticas, las dos cónicas base $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$, tienen o cuatro puntos en común (no necesariamente todos distintos), o una cantidad infinita de puntos comunes. Este último caso se da si ambas cónicas son la misma o si son cónicas degeneradas con una recta en común. Ambos casos son triviales y los excluirémos.

Observación. El haz de cónicas determinado por $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ es simplemente la familia de cónicas que pasan por los cuatro puntos comunes de $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$.



Definición. Se llama *base de un haz de cónicas* al conjunto de los puntos de $\mathbb{P}_2$ que están en todas las cónicas del haz. Esto es, son los puntos comunes de las dos cónicas que determinan el haz.

Proposición. Un haz de cónicas en $\mathbb{P}_2$ contiene a lo más tres cónicas no regulares, a menos que el haz esté compuesto por cónicas todas ellas no regulares.

Ejemplo. Las cónicas $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 &\equiv x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_2 = 0, \\ \bar{C}_2 &\equiv -x_1^2 + 2x_0x_2 = 0,\end{aligned}$$

nos proporcionan el haz

$$\lambda\bar{C}_1 + \mu\bar{C}_2 \equiv (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda + \mu \\ 0 & 2\lambda - \mu & 0 \\ 2\lambda + \mu & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Las cónicas no regulares de este haz son las que cumplen

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda + \mu \\ 0 & 2\lambda - \mu & 0 \\ 2\lambda + \mu & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (2\lambda - \mu)(\lambda^2 - (2\lambda + \mu)^2).$$

Esto es, ó $\mu = 2\lambda$ ó

$$\lambda^2 = (2\lambda + \mu)^2 \iff \begin{cases} \lambda = 2\lambda + \mu \\ \lambda = -2\lambda - \mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \mu = -3\lambda \end{cases}$$

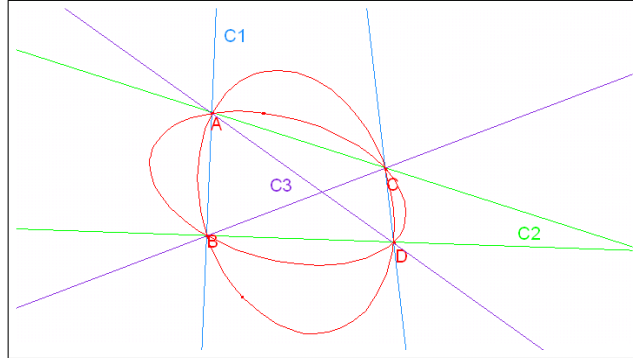
Las cónicas no regulares de este haz son las siguientes cónicas

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2 &\equiv x_0^2 + 8x_0x_2 + x_2^2 = (x_0 + 4x_2)^2 - 15x_2^2 \\ &= (x_0 + 4x_2 + 15x_2)(x_0 + 4x_2 - 15x_2) = 0, \\ \bar{C}_1 - \bar{C}_2 &\equiv x_0^2 + 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_2 = (x_0 + x_2)^2 + 3x_1^2 = 0, \\ \bar{C}_1 - 3\bar{C}_2 &\equiv x_0^2 + 5x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 = (x_0 - x_2)^2 + 5x_1^2 = 0.\end{aligned}$$

Luego, $\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2$ es el par de rectas $x_0 + 4x_2 + 15x_2 = 0$, $x_0 + 4x_2 - 15x_2 = 0$, $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ es el par de rectas $x_0 + x_2 = 0$, $x_1 = 0$ y $\bar{C}_1 - \bar{C}_2$ es el par de rectas $x_0 - x_2 = 0$, $x_1 = 0$.

Observación. Supongamos que los puntos base A, B, C, D de un haz son todos distintos. Entonces el haz contiene exactamente tres cónicas degeneradas que son los siguientes pares de rectas:

$$\bar{C}_1 \equiv r(A \cup B)r(C \cup D), \bar{C}_2 \equiv r(A \cup C)r(B \cup D), \bar{C}_3 \equiv r(A \cup D)r(B \cup C)$$



Proposición. Por un punto no básico del haz pasa únicamente una cónica del haz.

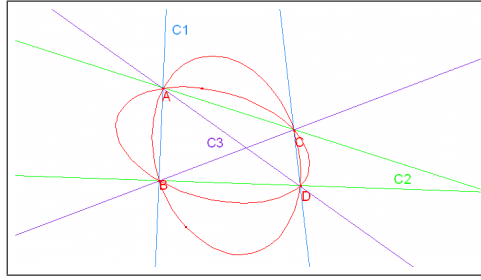
Definición. Los puntos singulares de las cónicas no regulares del haz se llaman *puntos fundamentales* del haz.

3.1 Posibles tipos de haces

En función de la multiplicidad de los cuatro puntos base del haz, tendremos distintos tipos de haces. Los discutiremos obteniendo los casos más singulares a partir del caso general.

3.1.1 Haz general: Cuatro puntos simples

El haz $\lambda\bar{C} + \mu\bar{C}'$ tiene cuatro puntos base distintos A, B, C y D . Por tanto, tiene tres cónicas no regulares: $\bar{C}_1 \equiv r(A \cup B)r(C \cup D)$, $\bar{C}_2 \equiv r(A \cup C)r(B \cup D)$, $\bar{C}_3 \equiv r(A \cup D)r(B \cup C)$. La situación es la de la siguiente figura:



Este tipo de haz lo utilizaremos para determinar una cónica cuando tengamos 5 puntos de la cónica o 4 puntos y otra condición, como por ejemplo ser de un determinado tipo o ser tangente a una recta dada, etc...

Ejemplo. Determinar la cónica que contiene a los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$, y $C(1, -1, 0)$ y cuyo centro es $Z(2, 1, 0)$.

Como el centro Z es centro de simetría podemos calcular los puntos simétricos de los puntos A y B y así obtendremos dos puntos más de la cónica.

Tomamos las coordenadas del punto Z en la carta afín $x_0 = 1$. Por tanto, tomamos las coordenadas $(1, \frac{1}{2}, 0)$ de Z .

El simétrico de A es: $A' = 2Z - A = 2(1, \frac{1}{2}, 0) - (1, 0, 1) = (1, 1, -1)$ y el simétrico de B es $B' = 2Z - B = 2(1, \frac{1}{2}, 0) - (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$.

Tenemos cuatro puntos de la cónica A, A', B, B' por tanto, podemos determinar el haz de cónicas que contiene a dichos puntos. Dos cónicas del haz son las cónicas degeneradas: $C_1 \equiv r(A \cup A')r(B \cup B')$ y $C_2 \equiv r(A \cup B)r(A' \cup B')$.

Calculamos dichas rectas:

$$\begin{aligned} r(A \cup A') &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - x_0 + x_2 = 0, \\ r(B \cup B') &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - x_0 - x_2 = 0. \end{aligned}$$

Luego $\bar{C}_1 \equiv (2x_1 - x_0 + x_2)(2x_1 - x_0 - x_2) = 0$. Y

$$\begin{aligned} r(A \cup B) &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_2 - x_0 = 0, \\ r(A' \cup B') &\equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -x_0 - x_2 = 0, \end{aligned}$$

luego $\bar{C}_2 \equiv (x_2 - x_0)(x_0 + x_2) = 0$. El haz es:

$$\lambda \bar{C}_1 + \mu \bar{C}_2 \equiv \lambda (2x_1 - x_0 + x_2)(2x_1 - x_0 - x_2) + \mu (x_2 - x_0)(x_0 + x_2) = 0.$$

Como contiene al punto $C(1, -1, 0)$ se tiene que verificar:

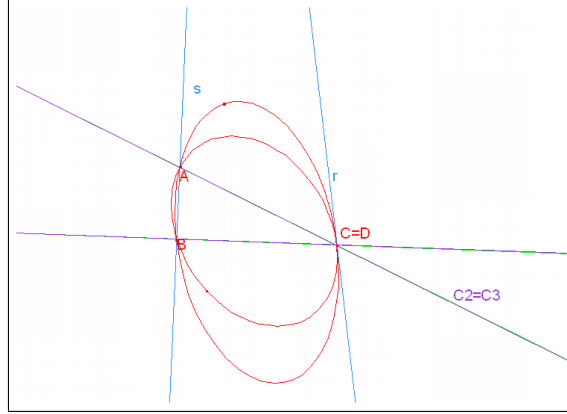
$$\lambda \bar{C}_1 + \mu \bar{C}_2 \equiv \lambda (-2 - 1)(-2 - 1) + \mu (-1) = 0 \implies \mu = 9\lambda.$$

Luego la cónica pedida es:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 + 9\bar{C}_2 &\equiv (2x_1 - x_0 + x_2)(2x_1 - x_0 - x_2) + 9(x_2 - x_0)(x_0 + x_2) = 0 \\ &\equiv 4x_1^2 - 8x_0^2 - 4x_0x_1 + 8x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

3.1.2 Dos puntos simples y uno doble

El haz $\lambda \bar{C} + \mu \bar{C}'$ tiene tres puntos base A, B, C , uno de ellos, C , es un punto doble. Este caso se obtiene como caso límite del anterior (cuando $C = D$) y tiene dos cónicas no regulares: la cónica $\bar{C}_1 \equiv rs$ donde r es la recta de tangencia, y s es la recta que contiene a A y B y la cónica $\bar{C}_2 \equiv r_1r_2$ donde r_1 es la recta que contiene a los puntos A y C y r_2 es la recta que contiene a los puntos B y C (la cónicas $\bar{C}_2$ y $\bar{C}_3$ del caso anterior coinciden). La situación es la de la siguiente figura:



La recta r es tangente a cualquier cónica regular del haz. El haz se puede plantear como:

$$\lambda rs + \mu r_1 r_2 = 0.$$

Este tipo de haz nos puede servir para problemas de determinación de cónicas cuando tengamos como datos: una tangente de la cónica y su punto de tangencia (sería la recta r de la figura) y que pase además por tres puntos o por dos puntos y algún dato más de la cónica como que sea de cierto tipo, o que sea tangente a cierta recta, etc...

Ejemplos

1. Determinar la parábola que pasa por los puntos de intersección de la cónica $\bar{C} \equiv -x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 = 0$ con la recta $r \equiv 3x_2 - x_0 = 0$ y es tangente a $\bar{C}$ en el punto $P[1, 1, 0]$.

Solución:

El punto $P \in \bar{C}$ y por tanto, su recta polar es la tangente a $\bar{C}$ en P . Calculamos la recta polar de P respecto de $\bar{C}$:

$$t \equiv (1, 1, 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_0 + x_1 = 0.$$

Los puntos de intersección de la recta r con la cónica $\bar{C}$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} -x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 = 0 \\ 3x_2 - x_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -9x_2^2 + x_1^2 + 4x_2^2 = 0 \\ 3x_2 = x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^2 = 5x_2^2 \\ 3x_2 - x_0 = 0 \end{cases}.$$

Por tanto, la recta y la cónica intersecan en los puntos A y B de coordenadas homogéneas $[3, \sqrt{5}, 1]$ y $[3, -\sqrt{5}, 1]$ respectivamente.

Pimer camino:

Utilizamos el siguiente haz de cónicas: $\lambda\bar{C} + \mu rt = 0$, esto es;

$$\lambda(-x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2) + \mu(3x_2 - x_0)(-x_0 + x_1) = 0$$

cuya matriz es

$$\begin{aligned} M_{Haz} &= \lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda + \mu & -\frac{1}{2}\mu & -\frac{3}{2}\mu \\ -\frac{1}{2}\mu & \lambda & \frac{3}{2}\mu \\ -\frac{3}{2}\mu & \frac{3}{2}\mu & 4\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imponemos que sea una parábola:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda & \frac{3}{2}\mu \\ \frac{3}{2}\mu & 4\lambda \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}(3\mu - 4\lambda)(4\lambda + 3\mu).$$

Y obtenemos dos cónicas con matrices: La cónica $\bar{C}_1$ de matriz

$$M_{\bar{C}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y se comprueba que $\det M_{\bar{C}_1} \neq 0$. Y la cónica $\bar{C}_2$ de matriz

$$M_{\bar{C}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

y se comprueba que $\det M_{\bar{C}_2} \neq 0$.

Segundo camino: Utilizamos el siguiente haz de cónicas: $\lambda r_1 r_2 + \mu rt = 0$, donde r_1 es la recta que contiene a los puntos P y A y r_2 es la recta que contiene a los puntos P y B ; esto es,

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv \det \begin{pmatrix} x_0 & 3 & 1 \\ x_1 & \sqrt{5} & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x_1 - x_0 + 3x_2 - x_2\sqrt{5} = 0, \\ r_2 &\equiv \det \begin{pmatrix} x_0 & 3 & 1 \\ x_1 & -\sqrt{5} & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x_1 - x_0 + 3x_2 + x_2\sqrt{5} = 0. \end{aligned}$$

La ecuación del haz es la siguientes:

$$\lambda(x_1 - x_0 + 3x_2 - x_2\sqrt{5})(x_1 - x_0 + 3x_2 + x_2\sqrt{5}) + \mu(3x_2 - x_0)(-x_0 + x_1) = 0$$

equivalentemente,

$$\lambda (6x_1x_2 - 6x_0x_2 - 2x_0x_1 + x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2) + \mu (3x_1x_2 - 3x_0x_2 - x_0x_1 + x_0^2) = 0;$$

y su matriz es

$$\begin{aligned} M_{Haz} &= \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\lambda - \frac{1}{2}\mu & -3\lambda - \frac{3}{2}\mu \\ -\lambda - \frac{1}{2}\mu & \lambda & 3\lambda + \frac{3}{2}\mu \\ -3\lambda - \frac{3}{2}\mu & 3\lambda + \frac{3}{2}\mu & 4\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imponemos que sea una parábola:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda + \frac{3}{2}\mu \\ 3\lambda + \frac{3}{2}\mu & 4\lambda \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} (2\lambda + 3\mu) (10\lambda + 3\mu).$$

Y obtenemos dos cónicas con matrices: La cónica $\bar{C}_1$ de matriz:

$$M_{\bar{C}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y se comprueba que $\det M_{\bar{C}_1} \neq 0$. Y la cónica $\bar{C}_2$ de matriz,

$$M_{\bar{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

y se comprueba que $\det M_{\bar{C}_2} \neq 0$.

- Determinar la cónica $\bar{C}$ que es tangente a la cónica $\bar{C}_1 \equiv -4x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 = 0$ en el punto $P[1, 2, 0]$, sabiendo que contiene al punto $Q[1, 0, 2]$ y a los puntos de intersección de $\bar{C}_1$ con la recta $r \equiv -3x_0 + 2x_1 + x_2 = 0$.

Solución:

El punto $P \in \bar{C}_1$ por tanto, su recta polar es la tangente a $\bar{C}_1$ en P . Calculamos la recta polar de P :

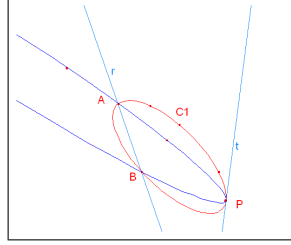
$$t \equiv (1, 2, 0) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -4x_0 + 2x_1 = 0.$$

Los puntos de intersección de la recta r con la cónica $\bar{C}_1$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -4x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 = 0 \\ -3x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -4x_0^2 + x_1^2 + 4(3x_0 - 2x_1)^2 = 0 \\ x_2 = 3x_0 - 2x_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 32x_0^2 - 48x_0x_1 + 17x_1^2 = 0 \\ x_2 = 3x_0 - 2x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

El discriminante de la ecuación $32t^2 - 48t + 17 = 0$ es $\Delta = (-48)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 17 > 0$, por tanto, la recta y la cónica intersecan en dos puntos A y B .

Tenemos la situación que muestra el siguiente dibujo:



Utilizamos el siguiente haz de cónicas: $\lambda \bar{C}_1 + \mu r t = 0$, esto es;

$$\lambda (-4x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2) + \mu (-3x_0 + 2x_1 + x_2)(-4x_0 + 2x_1) = 0.$$

Como $\bar{C}$ contiene al punto $Q[1, 0, 2]$ se verifica:

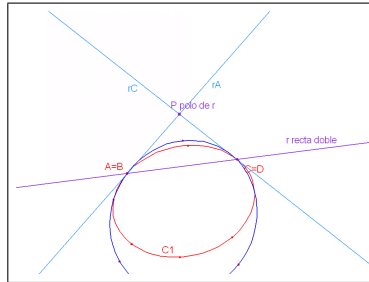
$$12\lambda + 4\mu = 0 \implies \mu = -3\lambda.$$

Luego la cónica pedida es:

$$\bar{C} \equiv (-4x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2) - 3(-3x_0 + 2x_1 + x_2)(-4x_0 + 2x_1) = 0.$$

3.1.3 Dos puntos dobles

En este caso la configuración del haz es la de la siguiente figura:



El haz tiene dos cónicas degeneradas: una es la formada por el par de rectas $r_A r_B$ y la otra es la formada por la recta de puntos dobles r . La ecuación del haz es

$$\bar{C}_{\lambda, \mu} \equiv \lambda r_A r_B + \mu r^2 = 0.$$

Por ejemplo, la familia de todas las hipérbolas que tienen dos rectas r y s como asíntotas, forman un haz de este tipo con ecuación:

$$\bar{C}_{\lambda, \mu} \equiv \lambda r s + \mu x_0^2 = 0.$$

Ejemplo. Determinar la cónica $\bar{C}$ tal que:

1. Pasa por el origen de la referencia y la tangente en él es la recta $r \equiv 6x_1 + x_2 = 0$.
2. Es tangente a la circunferencia $\bar{C}_1$ de centro $(4, -6)$ y radio 2 en el punto $Q(4, -4)$.
3. Los ejes de la cónica son paralelos a los ejes de coordenadas.

El origen de referencia es el punto $P[(1, 0, 0)]$ y la circunferencia dada es:

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 = 4 \implies 12x_2 - 8x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 48 = 0.$$

En el plano proyectivo, la circunferencia tiene ecuación:

$$12x_0x_2 - 8x_0x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 48x_0^2 = 0.$$

La tangente a $\bar{C}_1$ en el punto $Q[(1, 4, -4)]$ es

$$r_Q \equiv (1, 4, -4) \begin{pmatrix} 48 & -4 & 6 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 8x_0 + 2x_2 = 0.$$

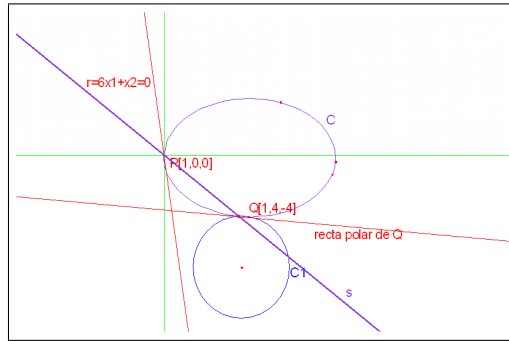
La recta que contiene a P y Q tiene ecuación:

$$s \equiv \det \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 4 \\ x_2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 4x_1 + 4x_2 = 0.$$

Consideramos el haz de cónicas tangentes a la recta $r \equiv 6x_1 + x_2 = 0$ en el punto P y que contiene al punto Q , $C_{\lambda, \mu} \equiv \lambda r + \mu s = 0$, esto es,

$$\bar{C}_{\lambda, \mu} \equiv \lambda(6x_1 + x_2)(4x_0 + x_2) + \mu(x_1 + x_2)^2 = 0;$$

$$\text{esto es, } \bar{C}_{\lambda, \mu} \equiv \lambda(24x_0x_1 + 4x_0x_2 + 6x_1x_2 + x_2^2) + \mu(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) = 0$$



La matriz del haz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 12\lambda & 2\lambda \\ 12\lambda & \mu & 3\lambda + \mu \\ 2\lambda & 3\lambda + \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

Como los ejes de la cónica buscada son paralelos a los ejes de coordenadas la matriz

$$A_{00} = \begin{pmatrix} \mu & 3\lambda + \mu \\ 3\lambda + \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

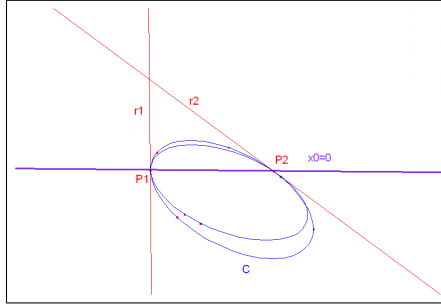
debe ser una matriz diagonal. Por tanto, $\mu = -3\lambda$. La cónica buscada tiene ecuación:

$$\bar{C} \equiv (6x_1 + x_2)(4x_0 + x_2) - 3(x_1 + x_2)^2 = 0.$$

3.1.4 Ejercicios

Ejercicio 1 Determinar la cónica $\bar{C}$ con asíntotas la recta $2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0$ y una recta paralela a la recta $x_1 = 0$ y tal que el punto $P[1, 1, 0]$ es polo de la recta $2x_1 + x_2 - 3x_0 = 0$ respecto de la cónica.

Solución Una recta paralela a la recta $x_1 = 0$ tiene ecuación: $bx_0 + x_1 = 0$. Por tanto, las asíntotas de $\bar{C}$ son las rectas $r_1 \equiv 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0$ y $r_2 \equiv bx_0 + x_1 = 0$. La cónica $\bar{C}$ tiene dos puntos impropios P_1, P_2 pues tiene dos asíntotas distintas. Se tiene la situación que muestra la figura:



Por tanto, la cónica que buscamos está en el siguiente haz de cónicas:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\lambda, \mu} &\equiv \lambda r_1 \cdot r_2 + \mu x_0^2 = 0; \\ \text{esto es, } \bar{C}_{\lambda, \mu} &\equiv \lambda(2x_0 - x_1 - 2x_2)(bx_0 + x_1) + \mu x_0^2 = 0, \end{aligned}$$

con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} \mu + 2b\lambda & \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -b\lambda \\ \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -b\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, como el punto P es polo de la recta $2x_1 + x_2 - 3x_0 = 0$ respecto de $\bar{C}$, se tiene que cualquier punto de dicha recta y el punto P son conjugados. Tomo los puntos $Q_1[(1, 0, 3)]$ y $Q_2[(0, 1, -2)]$ de la recta.

Como Q_1 y Q_2 son conjugados con P se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 0, 3) \begin{pmatrix} \mu + 2b\lambda & \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -b\lambda \\ \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -b\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\left(2 + \frac{3}{2}b\right)\lambda + \mu, \\ 0 &= (0, 1, -2) \begin{pmatrix} \mu + 2b\lambda & \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -b\lambda \\ \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -b\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(2 + \frac{3}{2}b\right)\lambda. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $\mu = 0$ y $b = -4/3$. La cónica es:

$$\bar{C} \equiv (2x_0 - x_1 - 2x_2) \left(-\frac{4}{3}x_0 + x_1 \right) = 0.$$

Ejercicio 2 Determinar la cónica $\bar{C}$ que contiene al origen y tiene las mismas asíntotas que la cónica $\bar{C}_1 \equiv 2x_0^2 + 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2 = 0$.

Solución La cónica $\bar{C}_1$ tiene matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -7 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

y es de tipo hiperbólico ya que $\det A_{00} = -9 - 49 < 0$. Por tanto, tiene dos puntos impropios P_1, P_2 que coinciden con los puntos impropios de la cónica a determinar. La cónica $\bar{C}$ es una cónica del haz que tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\lambda, \mu} &\equiv \lambda \bar{C}_1 + \mu x_0^2 = 0; \\ \text{esto es, } \bar{C}_{\lambda, \mu} &\equiv \lambda (2x_0^2 + 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2) + \mu x_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Como además contiene al origen, $O = [(1, 0, 0)]$, debe cumplirse que $2\lambda + \mu = 0$. Por tanto, la cónica buscada es

$$\begin{aligned} \bar{C} &\equiv \lambda (2x_0^2 + 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2) - 2\lambda x_0^2 = 0; \\ \text{esto es, } \bar{C} &\equiv 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2 = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 Determinar la parábola tangente a la recta r de ecuación $x_1 = 0$ en el punto T de coordenadas homogéneas $[1, 0, 2]$, con eje propio paralelo a la recta s de ecuación $2x_1 - 2x_2 + 3x_0 = 0$ y que contiene al punto P de coordenadas homogéneas $[1, 1, 0]$.

Solución Todos los diámetros de la cónica contienen al centro de la cónica que en este caso es un punto impropio. Como el eje propio es paralelo a la recta s de ecuación $2x_1 - 2x_2 + 3x_0 = 0$ contiene al punto impropio de s ; esto es, al punto $[0, 1, 1]$ de coordenadas $[0, 1, 1]$. Luego todos los diámetros de la parábola contienen a R .

Construimos el haz formado por la cónica: sr y por la recta doble que contiene a los puntos de tangencia T y R ; esto es, la recta de ecuación

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x_0 + x_1 - x_2 = 0.$$

La ecuación del haz es:

$$\lambda x_0 x_1 + \mu (2x_0 + x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Como la parábola pedida contiene al punto P , se tiene:

$$\lambda + \mu (2 + 1)^2 = 0 \implies \lambda = -9\mu.$$

La parábola pedida tiene ecuación:

$$-9x_0 x_1 + (2x_0 + x_1 - x_2)^2 = 0.$$

4 Cuádricas

Sea $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ el espacio proyectivo real tridimensional.

Definición. Una *cuádrica* $\bar{Q}$ en $\mathbb{P}_3$ determinada por una forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{P}_3$ definido por:

$$\bar{Q} = \{X \in \mathbb{P}_3 \mid \omega(X) = 0\}$$

Sea $\mathcal{R} = \{O, B\}$ un sistema de referencia en $\mathbb{A}_3$ y sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a la forma cuadrática ω entonces

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid X^t A X = 0\} \\ &= \left\{ [(x_0, x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_3 \mid \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x_i x_j = 0 \right\} \end{aligned}$$

La *cuádrica afín* definida por la forma cuadrática ω es el subconjunto Q de $\mathbb{A}_3$ definido por

$$Q = \{X \in \mathbb{A}_3 \mid \omega(\tilde{X}) = 0\},$$

donde $\tilde{X} = (1, x_1, x_2, x_3)$, con $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_3$. Se cumple $Q \subset \bar{Q}$.

4.1 Puntos singulares y clasificación proyectiva

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva determinada por una forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, con forma polar $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ y matriz asociada A respecto de cierto sistema de referencia.

Definiciones.

- Se dice que dos puntos $A, B \in \mathbb{P}_3$ son *conjugados* respecto de $\bar{Q}$ si $f(A, B) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_3$ es un punto *autoconjugado* respecto de $\bar{Q}$ si $\omega(P) = f(P, P) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_3$ es un *punto singular* de $\bar{Q}$ si es conjugado con cualquier punto de $\mathbb{P}_3$; esto es, $f(P, X) = 0$ para todo punto $X \in \mathbb{P}_3$. Esto es, si

$$f(P, X) = P^T A X = 0, \quad \forall X \in \mathbb{P}_3,$$

o equivalentemente,

$$P^T A = 0.$$

- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_3$ es un *punto regular* de $\bar{Q}$ si no es un punto singular.
- La cuádrica $\bar{Q}$ es *no degenerada, regular u ordinaria* si no tiene puntos singulares.
- La cuádrica $\bar{Q}$ es *degenerada ó singular* si tiene algún punto singular.

Observaciones: Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva generada por una forma cuadrática ω , con forma polar f y matriz asociada A .

1. Sea $\text{Sing}(\bar{Q})$ el conjunto de puntos singulares de $\bar{Q}$; esto es,

$$\begin{aligned}\text{Sing}(\bar{Q}) &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(X, Y) = 0, \text{ para todo } Y \in \mathbb{P}_3\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid AX = 0\}.\end{aligned}$$

Se tiene

$$\dim(\text{Sing}(\bar{Q})) = 3 - \text{rg}(A).$$

2. Si $X \in \mathbb{P}_3$ es un punto singular, entonces $X \in \bar{Q}$.

Demostración. Tenemos que comprobar que $\omega(X) = 0$. Se tiene $\omega(X) = f(X, X) = 0$ pues X es conjugado con cualquier punto, en particular con él mismo.

3. La recta determinada por un punto singular X y un punto cualquiera de la cuádrica, $Y \in \bar{Q}$, está contenida en la cuádrica.

Demostración. Como X es singular sabemos que $\omega(X) = 0$ y $f(X, Y) = 0$ y como Y pertenece a la cuádrica $\omega(Y) = 0$. Un punto cualquiera de la recta determinada por X e Y es de la forma $Z = \lambda X + \mu Y$. Tenemos que comprobar que $\omega(Z) = 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\omega(Z) &= \omega(\lambda X + \mu Y) = f(\lambda X + \mu Y, \lambda X + \mu Y) \\ &= f(\lambda X, \lambda X + \mu Y) + f(\mu Y, \lambda X + \mu Y) \\ &= f(\lambda X, \lambda X) + f(\lambda X, \mu Y) + f(\mu Y, \lambda X) + f(\mu Y, \mu Y) \\ &= \lambda^2 f(X, X) + 2\lambda\mu f(X, Y) + \mu^2 f(Y, Y) \\ &= \lambda^2 \underbrace{\omega(X)}_0 + 2\lambda\mu \underbrace{f(X, Y)}_0 + \mu^2 \underbrace{\omega(Y)}_0 = 0.\end{aligned}$$

4. La recta formada por dos puntos singulares tiene todos sus puntos singulares.

Demostración. Sea $Z = \lambda X + \mu Y$ un punto cualquiera de la recta formada por dos puntos singulares X e Y . Tenemos que comprobar que $f(Z, T) = 0$, para todo $T \in \mathbb{P}_3$. Tenemos:

$$\begin{aligned}f(Z, T) &= f(\lambda X + \mu Y, T) \\ &= f(\lambda X, T) + f(\mu Y, T) \\ &= \lambda \underbrace{f(X, T)}_0 + \mu \underbrace{f(Y, T)}_0 = 0.\end{aligned}$$

5. Si la cuádrica $\bar{Q}$ contiene un punto singular, entonces $\bar{Q}$ está formada por rectas que pasan por ese punto.

4.1.1 Clasificación proyectiva

1. Si $\det A \neq 0$, entonces la cuádrica $\bar{Q}$ se dice *regular* o *no degenerada*.
2. Si $\det A = 0$, entonces la cuádrica $\bar{Q}$ se dice *degenerada*.
 - (a) Si $\text{rg}(A) = 3$, entonces $\bar{Q}$ tiene un único punto singular P .
 - Si P es un punto propio, entonces $\bar{Q}$ es un *cono* de vértice P .
 - Si P es un punto impropio, entonces $\bar{Q}$ es un *cilindro*.
 - (b) Si $\text{rg}(A) = 2$, entonces $\bar{Q}$ tiene una recta de puntos singulares y $\bar{Q}$ es un *par de planos* con intersección la recta de puntos singulares.
 - (c) Si $\text{rg}(A) = 1$, entonces $\bar{Q}$ tiene un plano de puntos singulares y $\bar{Q}$ es un *plano doble*.

4.2 Polaridad definida por una cuádrica

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica con forma polar f y matriz asociada A . Sea $P \in \mathbb{P}_3$, llamamos *variedad polar* de P respecto de la cuádrica $\bar{Q}$ al conjunto de puntos conjugados de P ; esto es ,

$$\begin{aligned} V_P &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(P, X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid P^t A X = 0\}. \end{aligned}$$

Si $P \in \mathbb{P}_3$ es un punto singular, entonces $V_P = \mathbb{P}_3$.

Si $P \in \mathbb{P}_3$ no es un punto singular, entonces V_P es un plano π_P y llamamos *plano polar* de P respecto de la cuádrica $\bar{Q}$:

$$\pi_P = \{X \in \mathbb{P}_3 \mid P^t A X = 0\}.$$

Definición. Dado un plano π del espacio $\mathbb{P}_3$, llamamos *polo* del plano π respecto de la cuádrica $\bar{Q}$ al punto cuyo plano polar es π ; esto es, $\pi_P = \pi$.

Si la ecuación del plano π es

$$\begin{aligned} \pi &\equiv u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = U^T X = 0, \\ \text{con } U &= (u_0, u_1, u_2, u_3) \text{ y } X = (x_0, x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

entonces $\pi_P = \pi$ si y sólo si

$$P^T A X = U^T X, \text{ para todo } X \in \mathbb{P}_3$$

equivalentemente,

$$P^T A = U^T \iff AP = U.$$

Y si la cuádrica $\bar{Q}$ no es degenerada (por tanto, $\det A \neq 0$), entonces $P = A^{-1}U$.

Teorema. Si el punto P pertenece al plano polar de un punto R , entonces el punto R está en el plano polar de P .

Esto es debido a que la condición de conjugación $f(P, R) = 0$ es simétrica en P y R .

Como hemos visto, dada una cuádrica $\bar{Q}$, a cada punto P no singular, se le asigna un plano (su plano polar) y recíprocamente, a cada plano π se le asigna un punto (su polo).

Definición. Se llama *polaridad definida por una cuádrica $\bar{Q}$* a la aplicación que a cada punto no singular de $\bar{Q}$ le hace corresponder su plano polar. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_3 \setminus \text{Sing}(\bar{Q}) &\longrightarrow \text{Planos de } \mathbb{P}_3 \\ P &\longmapsto \pi_P \end{aligned}$$

Teorema fundamental de la polaridad

Los planos polares de los puntos de un plano π de $\mathbb{P}_3$, respecto de una cuádrica regular $\bar{Q}$, pasan todas por un mismo punto que es precisamente el polo de π .

4.3 Intersección de recta y cuádrica

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva con forma polar f y matriz asociada A y sea r la recta proyectiva que contiene a los puntos $P = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ y $Q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$. Un punto $X \in \mathbb{P}_3$ está en la intersección de la cónica y la recta si y sólo si:

$$\begin{cases} X \in r \\ X \in \bar{Q} \end{cases} \iff \begin{cases} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(X) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(\lambda P + \mu Q) = 0 \end{cases}$$

La condición $\omega(\lambda P + \mu Q) = 0$ se escribe:

$$0 = \lambda^2 \omega(P) + 2\lambda\mu f(P, Q) + \mu^2 \omega(Q).$$

Dividiendo la ecuación anterior por μ^2 y escribiendo $t = \lambda/\mu$ se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$0 = \omega(P)t^2 + 2f(P, Q)t + \omega(Q)$$

con discriminante

$$\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q).$$

- Si $f(P, Q) = 0$, $\omega(P) = 0$ y $\omega(Q) = 0$, entonces $P, Q \in \bar{Q}$ y, por tanto, $r \subset \bar{Q}$.
- Si no todos los coeficientes de la ecuación de segundo grado $0 = \omega(P)t^2 + 2f(P, Q)t + \omega(Q)$ son nulos, entonces hay dos puntos de corte (las dos soluciones de la ecuación).

1. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) > 0$, la recta y la cuádrica se cortan en dos puntos reales distintos. La recta se dice que es una *recta secante* a la cuádrica.
2. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) = 0$, la recta y la cuádrica se cortan en un punto doble. La recta se dice que es una *recta tangente* a la cuádrica.
3. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) < 0$, la recta y la cónica se cortan en dos puntos imaginarios distintos. La recta se dice que es una *recta exterior* a la cuádrica.

4.3.1 Variedad tangente a una cuádrica

Definición. La *variedad tangente* a una cuádrica $\bar{Q}$ en un punto $P \in \bar{Q}$, es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_3$ tales que la recta que une P y X es tangente a la cuádrica $\bar{Q}$; esto es,

$$\begin{aligned} T_P \bar{Q} &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid \Delta = f(P, X)^2 - \omega(P)\omega(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(P, X) = 0\}. \end{aligned}$$

Observaciones.

1. Si $P \in \bar{Q}$ es un punto regular, entonces

$$\begin{aligned} T_P \bar{Q} &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(P, X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid P^t A X = 0\} \end{aligned}$$

es un plano, llamado *el plano tangente a $\bar{Q}$ en P* . De hecho, coincide con el plano polar del punto P ; esto es, $T_P \bar{Q} = \pi_P$.

2. Si $P \in \bar{Q}$ es un punto singular, entonces $T_P \bar{Q} = \mathbb{P}_3$.
3. Si $P \notin \bar{Q}$, podemos definir la *variedad tangente a $\bar{Q}$ en $P \notin \bar{Q}$* como el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_3$ tales que la recta que une P y X es tangente a la cuádrica $\bar{Q}$; esto es,

$$\begin{aligned} T_P \bar{Q} &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid \text{recta } XP \text{ es tangente a } \bar{Q}\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid \Delta = f(P, X)^2 - \omega(P)\omega(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(P, X)^2 = \omega(P)\omega(X)\}. \end{aligned}$$

Y se cumple que $T_P \bar{Q}$ es una cuádrica degenerada que tiene a P como punto singular.

4.4 Clasificación afín y elementos notables de las cuádricas

Sea $\bar{\mathbb{A}}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ el espacio afín proyectivizado, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$. Y sea ω una forma cuadrática con matriz asociada A . Sea

$$\bar{Q} = \{X \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}^4) \mid \omega(X) = 0\}$$

una cuádrica proyectiva con cuádrica afín

$$Q = \bar{Q} \cap \mathbb{A}_3 = \{X \in \mathbb{A}_3 \mid \omega(\tilde{X}) = 0\}, \text{ donde } \tilde{X} = (1, x_1, x_2, x_3).$$

4.4.1 Centro de una cuádrica afín

Definición. Se llama *centro* de una cuádrica afín Q al polo del plano del infinito si ese punto es un punto propio (si no lo es, se dice que el centro de la cuádrica es impropio).

La ecuación del plano del infinito es $x_0 = 0$ y la ecuación de la cuádrica es $X^t A X = 0$. Por tanto, el polo del plano del infinito es el punto P tal que $P^t A = (1, 0, 0, 0)$.

Proposición. El centro de una cuádrica afín es centro de simetría. Cualquier recta que pase por el centro de una cuádrica corta a la cuádrica en dos puntos simétricos respecto del centro.

4.4.2 Posición relativa de la cuádrica y el plano del infinito

Sea $\pi_\infty \equiv x_0 = 0$ la ecuación del plano del infinito y sea la cuádrica proyectiva $\bar{Q}$ determinada por una forma cuadrática ω y con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\bar{Q} \cap \pi_\infty = \{X \in \pi_\infty \mid \omega(X) = 0\} = \{(0, x_1, x_2, x_3) \mid X^t A X = 0\}$$

esto es,

$$\bar{Q} \cap \pi_\infty \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

luego $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es una cónica en el plano del infinito π_∞ con matriz

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Proposición. el centro de la cuádrica $\bar{Q}$ es un punto propio si y sólo si $\det A_{00} \neq 0$. Además,

- Si $\det A_{00} \neq 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es no degenerada.
- Si $\det A_{00} = 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es degenerada.

4.4.3 Diámetros de una cuádrica

Definición. Se llama *diámetro* de una cuádrica $\bar{Q}$ a toda recta que contienen al centro de $\bar{Q}$.

Definición. Se llama *plano diametral* de una cuádrica $\bar{Q}$ a los planos que contienen al centro de $\bar{Q}$.

Definición. Dos diámetros d y d' de una cuádrica $\bar{Q}$ de matriz asociada A se dice que son *conjugados* si sus respectivos puntos impropios, P , P' , son conjugados; esto es, $P^t A P' = 0$.

Definición. Se llama *plano diametral polar de un diámetro d* al plano polar del punto del impropio de d .

4.4.4 Ejes de una cuádrica con centro propio

Definición. Se llama *eje* de una cuádrica $\bar{Q}$ al diámetro que es perpendicular a su plano diametral polar.

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva con matriz asociada A . Y sea A_{00} la matriz de la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$. Como $\bar{Q}$ tiene centro propio Z , la matriz A_{00} es no singular, luego sus tres autovalores son no nulos λ_1, λ_2 y λ_3 . Sean v_1, v_2 y v_3 los autovectores asociados a λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente (elegimos los autovectores ortogonales dos a dos). Los ejes $\bar{Q}$ son las rectas que pasan por el centro, Z , y tienen direcciones los vectores v_1, v_2 y v_3 , respectivamente.

La referencia $\mathcal{R} = \{Z, (v_1, v_2, v_3)\}$ nos proporciona una referencia cartesiana autoconjugada.

Se pueden dar tres casos:

1. Los tres autovalores son distintos. Entonces $\bar{Q}$ tiene tres ejes que son ortogonales dos a dos.
2. Un autovalor es doble, $\lambda_1 = \lambda_2$, y el otro, λ_3 , es simple. Entonces la dimensión del subespacio de autovectores asociado al autovalor doble es $\dim V_1 = 2$ y $\dim V_3 = 1$. Luego V_1 es un plano de ejes perpendiculares al eje V_3 . En este caso la cuádrica $\bar{Q}$ es una cuádrica de revolución alrededor del eje correspondiente al autovalor λ_3 .
3. Los tres autovalores coinciden, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Entonces cualquier diámetro es eje y la cuádrica es una esfera.

Definición. Se llaman *planos principales* de una cuádrica $\bar{Q}$ a los planos diametrales polares de los ejes.

4.4.5 Cono asintótico

Definición. Se llaman *asíntotas* de una cuádrica $\bar{Q}$ a las tangentes a la cónica en sus puntos impropios.

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva con centro propio Z .

Definición. La variedad tangente a la cuádrica $\bar{Q}$ desde el centro $Z[(z_0, z_1, z_2, z_3)]$ es un cono que recibe el nombre de *cono asintótico*. La ecuación del cono asintótico es la siguiente:

$$\begin{aligned} f(Z, X)^2 - \omega(Z)\omega(X) &= 0 \iff (Z^t AX)(Z^t AX) - (Z^t AZ)(X^t AX) = 0 \\ &\iff x_0^2 - z_0(X^t AX) = 0 \\ &\iff x_0^2 - \frac{\det A_{00}}{\det A}(X^t AX) = 0 \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\frac{\det A}{\det A_{00}}x_0^2 - \bar{Q} = 0.$$

Las cuádricas de tipo elíptico tienen un cono asintótico imaginario y las cuádricas de tipo hiperbólico tienen un cono asintótico real.

Las *generatrices* del cono (rectas del cono) son los diámetros tangentes a la cuádrica.

Llamamos *plano asintótico* a los planos polares de los puntos de la cónica impropia de $\bar{Q}$ ($\bar{Q} \cap \pi_\infty = C$) (si existen).

Ejemplo 1. Sea la cuádrica $Q \equiv x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_3 + 2 = 0$.

La matriz de Q es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es $\det A = -20$, cuádrica con centro propio:

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\begin{cases} 2z_0 + z_3 = \rho \\ z_1 + 2z_2 = 0 \\ 2z_1 = 0 \\ z_0 + 3z_3 = 0 \end{cases}$$

El centro es: $Z[(1, 0, 0, -1/3)]$.

Ecuación del cono asintótico:

$$\begin{aligned} \frac{\det A}{\det A_{00}}x_0^2 - \bar{Q} &= 0 \iff \frac{20}{12}x_0^2 - (x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_3x_0 + 2x_0^2) = 0 \\ &\iff 2x_0x_3 + 4x_1x_2 + \frac{1}{3}x_0^2 + x_1^2 + 3x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

4.5 Invariantes métricos de una cuádrica $\bar{Q}$

Sea la cuádrica $\bar{Q}$ con matriz asociada A ; esto es, $\bar{Q} \equiv X^T A X = 0$. Son invariantes Euclideos de la cuádrica los siguientes valores:

- $\det A$
- Autovalores de A_{00} : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ o equivalentemente: $\det A_{00}$, $\text{tr } A_{00} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ y

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \det A_{00} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ J &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \\ \text{tr } A_{00} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{aligned}$$

La ecuación característica de A_{00} es:

$$|A_{00} - \lambda I_3| = -\lambda^3 + \text{tr } A_{00} \lambda^2 - J \lambda + \det A_{00} = 0.$$

Por tanto, λ_1, λ_2 y λ_3 son las raíces de la ecuación $|A_{00} - \lambda I_3| = 0$.

Si $\det A_{00} \neq 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es regular y $\bar{Q}$ tiene centro.

Si $\det A_{00} = 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es no regular. Se trata de una cuádrica de género paraboloide, puede carecer de centro, tener una recta de centros o incluso poseer un plano de centros.

4.5.1 Clasificación de las cuádricas con $\det A_{00} \neq 0$.

Al ser $\det A_{00} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$, en cierto sistema de referencia la matriz de la cuádrica es

$$\begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, la ecuación reducida de la cuádrica es $d_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$ con $d_0 = \frac{\det A}{\det A_{00}}$ y se trata de cuádricas *con centro*.

Por tanto, la ecuación reducida de la cuádrica afín ($x_0 = 1$) es:

$$-d_0 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2.$$

Si $\det A = d_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ (esto es, $\text{rg}(A) = 4$) entonces se trata de cuádricas *ordinarias*. Distinguimos dos casos: los autovalores de A_{00} tienen el mismo signo o dos tienen el mismo signo y el otro tiene signo opuesto.

1. Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(\lambda_3)$ ($+++$ o $---$), se dice que A_{00} tiene *signatura* 3, $\text{sig } A_{00} = 3$, y pueden suceder los siguientes casos:

- (a) Si $\text{signo}(d_0) = \text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(\lambda_3)$, entonces $\det A > 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica afín es

$$1 = -\frac{x_1^2}{d_0/\lambda_1} - \frac{x_2^2}{d_0/\lambda_2} - \frac{x_3^2}{d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = d_0/\lambda_1$, $b^2 = d_0/\lambda_2$ y $c^2 = d_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = -\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2}$$

que es la ecuación de un *elipsoide imaginario*.

- (b) Si $\text{signo}(d_0) \neq \text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(\lambda_3)$, entonces $\det A < 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica es

$$1 = \frac{x_1^2}{-d_0/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{-d_0/\lambda_2} + \frac{x_3^2}{-d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = -d_0/\lambda_1$, $b^2 = -d_0/\lambda_2$ y $c^2 = -d_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$$

que es la ecuación de un *elipsoide*, y si además $a^2 = b^2 = c^2$ obtenemos una *esfera*.

2. Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) \neq \text{signo}(\lambda_3)$ ($++-$ o $--+$) se dice que A_{00} tiene *signatura* 2, $\text{sig } A_{00} = 2$, y pueden suceder los siguientes casos:

- (a) Si $\text{signo}(d_0) \neq \text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) \neq \text{signo}(\lambda_3)$, entonces $\det A > 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica afín es

$$1 = \frac{x_1^2}{-d_0/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{-d_0/\lambda_2} - \frac{x_3^2}{d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = -d_0/\lambda_1$, $b^2 = -d_0/\lambda_2$ y $c^2 = d_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2}$$

que es la ecuación de un *hiperboloide hiperbólico*.

- (b) Si $\text{signo}(d_0) = \text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) \neq \text{signo}(\lambda_3)$, entonces $\det A < 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica afín es

$$1 = -\frac{x_1^2}{d_0/\lambda_1} - \frac{x_2^2}{d_0/\lambda_2} + \frac{x_3^2}{-d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = d_0/\lambda_1$, $b^2 = d_0/\lambda_2$ y $c^2 = -d_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = -\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$$

que es la ecuación de un *hiperboloide elíptico*.

Si $\det A = d_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$ (esto es, $d_0 = 0$ y $\text{rg}(A) = 3$) entonces se trata de cuádricas con centro *degeneradas* de ecuación reducida $\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 = 0$. Distinguimos dos casos: los tres autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 tienen el mismo signo o dos tienen el mismo signo y el otro tiene signo opuesto.

1. Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(\lambda_3)$ (+++ o ---), la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2$$

y se trata de un *cono imaginario que pasa por el origen*.

2. Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) \neq \text{signo}(\lambda_3)$ (++- o --+), la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = a^2x_1^2 + b^2x_2^2 - c^2x_3^2$$

luego la cuádrica es un *cono*.

Cuadro de clasificación de las cuádricas con centro

$$\det A_{00} \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{rg}(A) = 4 \\ \text{regulares} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{sig } A_{00} = 3 \\ \text{Elipsoides} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ll} \det A > 0 & \text{imaginario} \\ \det A < 0 & \text{real} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sig } A_{00} = 1 \\ \text{Hiperboloides} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ll} \det A > 0 & \text{hiperbólico} \\ \det A < 0 & \text{elíptico} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rg}(A) = 3 \\ \text{Conos} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ll} \text{sig } A_{00} = 3 & \text{Cono imaginario con un punto real} \\ \text{sig } A_{00} = 1 & \text{Cono real} \end{array} \right.$$

4.5.2 Clasificación de las cuádricas con $\det A_{00} = 0$.

Al ser $\det A_{00} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, al menos uno de los autovalores de A_{00} ha de ser nulo. Supongamos $\lambda_3 = 0$, por tanto, $J = \lambda_1\lambda_2$. En cierto sistema de referencia la matriz de la cuádrica es

$$\begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 & b_{03} \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = b_{00}x_0^2 + \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + 2b_{03}x_0x_3$$

y $\det A = -b_{03}^2\lambda_1\lambda_2$.

Si $J = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$ distinguimos varios casos:

1. Si $\det A \neq 0$ (esto es, $b_{03} \neq 0$), la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = 2b_{03}x_0x_3 + \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$$

y tenemos:

- (a) Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2)$, esto es $J > 0$, y tenemos la ecuación de un *paraboloide elíptico*.
- (b) Si $\text{signo}(\lambda_1) \neq \text{signo}(\lambda_2)$, esto es $J < 0$, y tenemos la ecuación de un *paraboloide hiperbólico*.

2. Si $\det A = 0$ (esto es, $b_{03} = 0$) la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = b_{00}x_0^2 + \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$$

y distinguimos varios casos:

- (a) Si $b_{00} \neq 0$ tenemos
 - i. Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2)$, esto es $J > 0$, y tenemos la ecuación de un *cilindro elíptico imaginario* ($b_{00} > 0$) ó *cilindro elíptico* ($b_{00} < 0$).
 - ii. Si $\text{signo}(\lambda_1) \neq \text{signo}(\lambda_2)$, esto es $J < 0$, y tenemos la ecuación de un *cilindro hiperbólico*.
- (b) Si $b_{00} = 0$ la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2.$$

- i. Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2)$, esto es $J > 0$, la cuádrica es un *par de planos imaginarios que se cortan*.
- ii. Si $\text{signo}(\lambda_1) \neq \text{signo}(\lambda_2)$, esto es $J < 0$, la cuádrica es un *par de planos que se cortan*.

Si A_{00} tiene dos autovalores nulos (suponemos $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$) entonces $\det A = 0$, $\det A_{00} = 0$, $J = 0$ y $\text{tr } A_{00} = \lambda_1$. En cierto sistema de referencia la matriz de la cuádrica es

$$\begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la ecuación reducida de la cuádrica es

$$b_{00} + \lambda_1x_1^2 = 0.$$

1. Si $b_{00} \neq 0$ tenemos:
 - (a) Si $\text{signo}(b_{00}) = \text{signo}(\lambda_1)$, la cuádrica es un *par de planos imaginarios paralelos*.
 - (b) Si $\text{signo}(b_{00}) \neq \text{signo}(\lambda_1)$, la cuádrica es un *par de planos paralelos*.
2. Si $b_{00} = 0$ tenemos $\lambda_1 x_1^2 = 0$ ($\Rightarrow x_1^2 = 0$) y se trata de un *par de planos coincidentes*.

Cuadro de clasificación de las cuádricas con $\det A_{00} = 0$

$$\det A_{00} = 0 \left\{ \begin{array}{ll} \text{rg}(A) = 4 \begin{array}{l} \text{regulares} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} J > 0 & \text{Paraboloide elíptico} \\ J < 0 & \text{Paraboloide hiperbólico} \end{array} \right. \\ \text{rg}(A) = 3 \begin{array}{l} \text{cilindros} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} J > 0 & \text{Cilindro elíptico real} \\ J < 0 & \text{Cilindro hiperbólico} \\ J = 0 & \text{Cilindro parabólico} \end{array} \right. \\ \text{rg}(A) = 2 \begin{array}{l} \text{par de planos} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} J > 0 & \text{Par de planos imaginarios (recta)} \\ J < 0 & \text{Par de planos secantes} \\ J = 0 & \text{Par de planos paralelos} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{imaginarios} \\ \text{reales} \end{array} \\ \text{rg}(A) = 1 & \text{plano doble} \end{array} \right.$$

4.5.3 Cuadro de la clasificación de las cuádricas afines de $\mathbb{R}^3$

$\text{rg}(A)$	$\text{sign}(A)$	$\bar{Q}$	π_∞	Q	$\bar{Q} \cap \pi_\infty$
4	4	cuádrica vacía no degenerada	cualquiera	vacía	vacía
4	2	cuádrica no reglada	exterior tangente secante	elipsoide paraboloide elíptico hiperboloide elíptico	vacía un punto cónica no degenerada
4	0	cuádrica reglada	tangente secante	paraboloide hiperbólico hiperboloide hiperbólico	dos rectas cónica no degenerada
3	3	cono imaginario (punto)	lo contiene no lo contiene	vacío un punto	1 0
3	1	cono	secante en el vértice tangente secante en dos generatrices secante a todas las generatrices	cilindro elíptico cilindro parabólico cilindro hiperbólico cono	1 recta doble dos rectas cónica no degenerada
2	2	par de planos imaginarios (recta)	no la contiene la contiene	una recta vacía	1 una recta
2	0	par de planos	secante a los dos secante en su intersección coincidente con uno de ellos	dos planos secantes dos planos paralelos un plano	dos rectas recta doble todo el plano
1	1	plano doble	transversal coincidente	plano doble vacía	recta doble todo el plano

con $\text{sign}(A) = |\alpha - \beta|$, $\alpha = n^\circ$ autovalores positivos, $\beta = n^\circ$ autovalores negativos.

Ejercicios Clasificar las siguientes cuádricas y obtener sus respectivas ecuaciones reducidas:

- $\bar{Q}_1 \equiv 2x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_0x_1 - x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 = 0.$
- $\bar{Q}_2 \equiv 2x_0^2 - x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_0x_3 + 4x_1x_2 = 0.$
- $\bar{Q}_3 \equiv 27x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 10x_0x_1 - 4x_0x_3 = 0.$
- $\bar{Q}_4 \equiv 3x_0^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 + 2x_0x_3 + 4x_1x_2 = 0.$
- $\bar{Q}_5 \equiv 3x_0^2 - 12x_1^2 - 4x_2^2 - 5x_0x_1 + 4x_0x_2 + 3x_0x_3 + 14x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$

Solución.

- La matriz asociada a la forma cuadrática $\bar{Q}_1$ es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A_1) = \frac{41}{16} > 0$, sabemos que $\bar{Q}_1$ es una cuádrica no degenerada reglada o vacía. Tenemos $\det(A_{00}) = \frac{5}{4} \neq 0$ por tanto, $\bar{Q}_1$ tiene centro propio. Tenemos $d_{00} = \det A_2 / \det A_{00} = \frac{41}{20}$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ y $\lambda_3 = -1$. Por tanto, $\bar{Q}_1$ es un **hiperboloide hiperbólico** de ecuación reducida:

$$\frac{41}{20}x_0'^2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}x_1'^2 - \frac{1}{2}\sqrt{5}x_2'^2 - x_3'^2 = 0.$$

El centro de $\bar{Q}_1$ satisface la ecuación $Z^t A_1 = [1, 0, 0, 0]$. Esto es,

$$[z_0, z_1, z_2, z_3] \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [1, 0, 0, 0]$$

equivalentemente,

$$\begin{cases} 2z_0 + z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 1 \\ z_0 + z_1 + \frac{1}{2}z_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}z_0 + \frac{1}{2}z_1 - z_2 = 0 \\ \frac{1}{2}z_0 - z_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z_0 = \frac{20}{41} \\ z_1 = -\frac{12}{41} \\ z_2 = -\frac{16}{41} \\ z_3 = \frac{10}{41} \end{cases}$$

Por tanto, el centro tiene coordenadas homogéneas $Z[10, -6, -8, 5]$.

Para calcular los ejes de $\bar{Q}_1$ calculamos primero los autovectores de A_{00} que son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \bar{v}_1 = (0, 0, 1), \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{5}, \bar{v}_2 = (-\sqrt{5} + 2, 1, 0), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{5}, \bar{v}_3 = (\sqrt{5} + 2, 1, 0). \end{aligned}$$

Por tanto, los ejes de $\bar{Q}_1$ son las rectas que pasan por el centro y tienen punto impropio $P_1[0, 0, 0, 1]$, $P_2[0, -\sqrt{5} + 2, 1, 0]$ y $P_3[0, \sqrt{5} + 2, 1, 0]$ respectivamente. Los planos principales de $\bar{Q}_1$ son los planos polares de P_1 , P_2 y P_3 respectivamente; esto es,

$$\pi_1 \equiv (0, 0, 0, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_0 - x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &\equiv (0, -\sqrt{5} + 2, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right)x_0 + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{5}\right)x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}x_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3 &\equiv (0, \sqrt{5} + 2, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{3}{2} + \sqrt{5}\right) x_0 + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{5}\right) x_1 + \frac{1}{2} \sqrt{5} x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Los ejes son por tanto, las rectas intersección de los planos principales,

$$eje_1 \equiv \begin{cases} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right) x_0 + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{5}\right) x_1 - \frac{1}{2} \sqrt{5} x_2 = 0 \\ \left(\frac{3}{2} + \sqrt{5}\right) x_0 + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{5}\right) x_1 + \frac{1}{2} \sqrt{5} x_2 = 0 \end{cases}$$

$$eje_2 \equiv \begin{cases} \left(\frac{3}{2} + \sqrt{5}\right) x_0 + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{5}\right) x_1 + \frac{1}{2} \sqrt{5} x_2 = 0 \\ \frac{1}{2} x_0 - x_3 = 0 \end{cases}$$

y

$$eje_3 \equiv \begin{cases} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right) x_0 + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{5}\right) x_1 - \frac{1}{2} \sqrt{5} x_2 = 0 \\ \frac{1}{2} x_0 - x_3 = 0 \end{cases}$$

2. La matriz asociada a la forma cuadrática $\bar{Q}_2$ es

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A_2) = 7 \neq 0$, la cuádrica $\bar{Q}_2$ es regular. Tenemos $\det(A_{00}) = 0$ y $\text{rg}(A_{00}) = 2$, por tanto, $\bar{Q}_2 \cap \pi_\infty$ es una cónica degenerada. Tenemos $\lambda_1 = 1 - 2\sqrt{2} < 0$, $\lambda_2 = 2\sqrt{2} + 1 > 0$ y $\lambda_3 = 0$, por tanto la cuádrica es un **paraboloides hiperbólico**. De $7 = \det(A_2) = -d_{03}^2 \lambda_1 \lambda_2 = -d_{03}^2 \mathbf{J}$ y teniendo en cuenta $\mathbf{J} = -7$, obtenemos

$$d_{03}^2 = -\frac{\det(A_2)}{\mathbf{J}} = 1$$

La ecuación reducida de $\bar{Q}_2$ es:

$$(1 - 2\sqrt{2}) x_1'^2 + (2\sqrt{2} + 1) x_2'^2 \pm 2x_0' x_3' = 0.$$

3. La matriz asociada a la forma cuadrática $\bar{Q}_3$ es

$$A_3 = \begin{pmatrix} 27 & -5 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A_3) = -4 < 0$, sabemos que $\bar{Q}_3$ es una cuádrica no degenerada no reglada. Tenemos $\det(A_{00}) \neq 0$, por tanto, $\bar{Q}_3 \cap \pi_\infty$ es una cónica

no degenerada. Tenemos $\lambda_1 = 1 > 0$ doble y $\lambda_2 = 2 > 0$ y $d_{00} = \det(A_3)/\det(A_{00}) = -2 < 0$, por tanto la cuádrica es un **elipsoide real**. La ecuación reducida de $\bar{Q}_3$ es:

$$-2x_0'^2 + x_1'^2 + 2x_2'^2 + x_3'^2 = 0.$$

Es una cuádrica de revolución pues tiene un autovalor doble. El eje de revolución es la recta que contiene al centro de la cuádrica y al punto impropio P de coordenadas homogéneas $[0, 0, 1, 0]$. Las coordenadas homogéneas $[z_0, z_1, z_2, z_3]$ del centro de la cuádrica satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned} [z_0, z_1, z_2, z_3]A_3 &= [1, 0, 0, 0] \iff [z_0, z_1, z_2, z_3] = [1, 0, 0, 0]A_3^{-1} \\ &\iff [z_0, z_1, z_2, z_3] = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 0, 1\right] \end{aligned}$$

por tanto, el centro tiene coordenadas homogéneas $[1, 5, 0, -2]$. Las ecuaciones paramétricas del eje de revolución son:

$$X = \lambda Z + \mu P \iff \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = 5\lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 5x_0 \\ x_2 = x_0 \end{cases} \quad \text{son las ecuaciones} \\ \text{cartesianas del eje de revolución.}$$

El plano diametral polar del eje de revolución es el plano polar de P , por tanto tiene ecuación:

$$\begin{aligned} P^t A_3 X &= 0 \iff (0, 0, 1, 0) \begin{pmatrix} 27 & -5 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

4. La matriz asociada a la forma cuadrática $\bar{Q}_4$ es

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A_4) = -2 \neq 0$, la cuádrica $\bar{Q}_4$ es regular. Tenemos $\det(A_{00}) = 0$, por tanto, $\bar{Q}_4 \cap \pi_\infty$ es una cónica degenerada. Tenemos $\lambda_3 = -1 < 0$ y de $0 = \det(A_{00}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ y $-5 = \text{tr}(A_{00}) = \lambda_1 + \lambda_2 - 1$ obtenemos: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -4 < 0$. La cuádrica es un **paraboloides elíptico** (pues $J > 0$). Si la matriz asociada a $\bar{Q}_4$ en cierta referencia es:

$$A'_4 = \begin{pmatrix} 0 & d_{01} & 0 & 0 \\ d_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

entonces de $-2 = \det(A_4) = -d_{01}^2 \lambda_2 \lambda_3 = -4d_{01}^2$ obtenemos $d_{01} = \pm 1/\sqrt{2}$. La ecuación de $\bar{Q}_4$ en esa referencia es:

$$\pm 2/\sqrt{2}x'_0x'_1 - 4x_2'^2 - x_3'^2 = 0.$$

5. La matriz asociada a $\bar{Q}_5$ es

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -12 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A_5) = 0$, la cuádrica $\bar{Q}_5$ es degenerada. Tenemos $\det(A_{00}) = 0$, por tanto, $\bar{Q}_5 \cap \pi_\infty$ es una cónica degenerada. Como $\text{rg}(A) = 2$, $\bar{Q}_5$ tiene una recta de puntos singulares, por tanto, es un **par de planos**. Tenemos $\lambda_1 = 0$, y

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{vmatrix} -12 & 7 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1 - 1 - 4 < 0. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{J} = \lambda_2 \lambda_3 < 0$, entonces A_{00} tiene un autovalor positivo y otro negativo. La cuádrica es un par de planos reales. La ecuación de $\bar{Q}_5$ en cierta referencia es:

$$\lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 0.$$

5 Referencias

J. M. Aroca Hernández-Ros, M. J. Fernández Bermejo, *Notas de Geometría Projectiva*, Universidad de Valladolid, 2002.

F. Etayo Gordejuela, *Apuntes de Geometría Projectiva*, Universidad de Cantabria.

J. G. Semple, G. T. Kneebone, *Algebraic projective geometry*, Springer-Verlag, 1988.

J. L. Pinilla, *Lecciones de programación lineal-cónicas-cuádricas-supercies*, Ed. Varicop, Madrid, 1971.