



MATEMATICAS II

HOJA 4: Integrales dobles.

1. Evaluar cada una de las siguientes integrales siendo $R = [0, 1] \times [0, 2]$:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \iint_R (x^3 + y^2) dx dy & \text{d)} \iint_R (x^2 + y) dx dy \\ \text{b)} \iint_R y e^{xy} dx dy & \text{e)} \iint_R y L(1+x) dx dy. \\ \text{c)} \iint_R (xy)^2 \cos x^3 dx dy & \text{f)} \iint_R y(x^3 - 12x) dx dy. \end{array}$$

2. En las siguientes integrales, cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y obtener el valor de la integral:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \int_x^1 xy dy dx \quad (:= \frac{1}{8}) & \text{d)} \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 dx dy \quad (:= \frac{2}{3}) \\ \text{b)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr d\theta \quad (:= \frac{1}{4}\pi) & \text{e)} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx \quad (:= \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}) \\ \text{c)} \int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 dx dy \quad (:= \frac{17}{12}) & \text{f)} \int_1^2 \int_0^{\log y} e^{-x} dx dy \quad (:= 1 - \log 2) \end{array}$$

3. Calcular $\iint_D e^{x/y} dx dy$ siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 \leq x \leq y^2, \frac{1}{10} \leq y\}$.

4. Calcular $\iint_D f(x, y) dx dy$, $f(x, y) = x^3 y + \cos x$ y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$. (Solución: $\frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$)

5. Hallar la integral doble $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y - x = 1$. Se recomienda usar el cambio de variable:

$$\begin{cases} u &= x^2 + y^2 \\ v &= y - x. \end{cases}$$

6. Calcular $\iint_D (x^2 - y) dx dy$ siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. (Solución: $\frac{4}{5}$).

7. Calcular $\iint_D xy dx dy$ siendo D la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^4$.

8. Hallar $\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{(x+y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) dx$. (Indicación: se recomienda cambiar el orden de integración. Solución: $-4 + 4\sqrt{2}$).

9. Calcúlese $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dx dy$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 2\}$. Tómese para ello el cambio de variable $y - x = u$, $y + x = v$. Solución: $e - \frac{1}{e}$

10. Expresar mediante integrales iteradas, la siguiente integral $\iint_D f(x, y) dx dy$ siendo D el conjunto definido por las inecuaciones $0 \leq y \leq 1$, $\sqrt{y} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-y^2}$. Calcular $\iint_D y dx dy$. Solución: $\frac{13}{30}$.

11. Hallar la integral $\iint_D (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) dx dy$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, a \leq xy \leq b, y^2 - x^2 \leq 1, x \leq y\}$$

con $0 < a < b$. Se recomienda utilizar el cambio de variable $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

Solución: $\frac{1}{2} \log \frac{1+b}{1+a}$.

12. Hallar $\iint_D xy dx dy$ siendo D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$ y $x^2 - y^2 = 1$. Utilizar el cambio de variable $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$. Solución: $\frac{15}{8}$.
13. Hallar $\iint_D xy dx dy$ siendo D
- el cuadrado de vértices $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$;
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, y \geq 0, 4x^2 + 9y^2 \leq 36\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, y \geq 0, x + 2 - y \geq 0\}$.
14. Calcular el volumen cubierto por la superficie $z = \sqrt{x}$ sobre el recinto limitado, en el plano OXY, por la curva $x^2 + y^2 - x = 0$.
15. Hallar el volumen del tetraedro acotado por los planos $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$ y $y - x + z = 1$. (Solución: $\frac{1}{6}$).
16. Hallar el área limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$ y $x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$. Solución: $\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$.
17. Calcular la integral $\iint_D x \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$ siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y\}$. Solución: $\frac{\pi}{16}$.
18. Evaluar $\iint_D y^3 (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$, donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ y $x^2 + y^2 \leq 1$. (Nota: calcular dicha integral calculando la adecuada integral iterada y también utilizando el cambio de variable a polares). (Solución: $\frac{1}{4}\sqrt{3}$).
19. Calcular el volumen comprendido entre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y el cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
20. Calcular el volumen comprendido entre el cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 1$, el paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y el plano $z = 0$.
21. Hallar el volumen limitado por la cubierta intersección de dos cilindros parabólicos de ecuaciones $C_1 \equiv z = 36 - y^2$ y $C_2 \equiv z = 36 - x^2$ y la planta $z = 0$.
22. Hallar el volumen de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$:
- $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2\}$
 - $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq x, 0 \leq z\}$
 - $C = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$
23. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, el plano $z = 0$ y los cilindros $y^2 = x$ y $x^2 = y$.
24. Hallar el volumen en el primer octante comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.
25. Sea D la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 4$. Calcular $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$. Sugerencia hacer el cambio de variable $u = xy$, $v = x^2 - y^2$.
26. Calcular $\int \int_D xy dx dy$ siendo

$$D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 2y^2, x^2 \leq y \leq 2x^2\}.$$

Se aconseja hacer el cambio de variable $u = \frac{x}{y^2}$, $v = \frac{y}{x^2}$.