



## MATEMATICAS II

### Hoja 5: Integral Triple

1. Calcular las siguientes integrales triples en los recintos indicados:

- (a)  $\iiint_D x + zy + x^2 y z dx dy dz$ ,  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 2\}$ . Sol.:  $-\frac{1}{3}$
- (b)  $\iiint_D zxy\sqrt{1+y^2} dx dy dz$ ,  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ . Sol.:  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}$
- (c)  $\iiint_D \frac{z^2 y - zx^2 - zx^4}{1+x^2} dx dy dz$ , con  $D$  el cubo unidad  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Solución:  $\frac{\pi-4}{24}$ .
- (d)  $\iiint_D dx dy dz$ , siendo  $D$  el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano  $x+y+z=1$ .  
(El valor de la integral es el volumen del tetraedro). Sol.:  $\frac{1}{6}$
- (e)  $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz$ ,  $D$  la esfera unidad centrada en el origen. Indicación: Cambiar a coordenadas esféricas. Solución:  $\frac{2}{3}\pi(e-1)$ .
- (f)  $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ , siendo  $D$  el recinto limitado por las esferas  $x^2+y^2+z^2=a^2$  y  $x^2+y^2+z^2=b^2$  con  $0 < b < a$ . Sol.:  $2\pi \ln \frac{a}{b}$
- (g)  $\iiint_D yz dx dy dz$ , siendo  $D$  la región limitada por el elipsoide de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  y los semiespacios  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  y  $z \geq 0$ . Solución:  $\frac{abc^2}{15}$ .

2. Expresar en la forma  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dots\}$  y hacer un esbozo de los recintos de integración de las siguientes integrales:

(a)  $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \sin y^2 dz dy dx$ , (b)  $\int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz dx dy$ , (c)  $\int_0^4 \int_0^{\frac{4-x}{2}} \int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} dz dy dx$ .

Finalmente plantear alguna otra de las integrales iteradas y hallar el valor de dicha integral.

Solución: (a) 1; (b)  $\frac{1}{3}$ ; (c) 4.

3. Calcular el volumen limitado por el cono de ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$  y los planos  $z = 0$  y  $z = 3$ .  
Indicación: utilizar el cambio de variable a coordenadas cilíndricas. Solución:  $9\pi$ .
4. Hallar el volumen limitado por los paraboloides de ecuaciones  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2 - x^2 - y^2$ .  
Solución: Vol =  $\pi$ .
5. Hallar el volumen del cuerpo definido como  $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$ . Sol.:  $3\pi$ .
6. Hallar el volumen comprendido entre  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$  y  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z \geq 0$ . Sol.:  $\frac{1000\pi}{3} (2 - \sqrt{2})$ .
7. Sea  $W$  la región acotada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .  
Calcular  $\int \int \int_W x dx dy dz$ . Sol.:  $\frac{8\sqrt{2}}{15}$ .
8. Calcular el volumen interior al cilindro  $x^2 + y^2 = 2ax$  limitado por las superficies  $z = 0$  y  $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ , siendo  $a > 0$ . Sol.:  $\frac{8a^3}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right)$ .

9. Calcular el volumen del elipsoide de semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Sol.:  $\frac{4}{3}\pi abc$ .
10. Hallar la masa de la lámina limitada por las circunferencias  $x^2 + y^2 = 2x$  y  $x^2 + y^2 = 4x$  y función de densidad  $\rho(x, y) = x$ . Sol.:  $7\pi$ .
11. Hallar el centro de masa de una lámina  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y\}$  de un material no homogéneo tal que la densidad en cada punto  $(x, y)$  viene dada por  $\rho(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .  
Sol.:  $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$ .
12. Calcular el centro de gravedad de un cilindro circular recto de radio de la base  $R$ , de altura  $h$  y cuya densidad varía proporcionalmente a su distancia a la base.  
Sol.:  $(0, 0, \frac{2h}{3})$ .
13. Calcular el momento de inercia con respecto al eje  $OY$  del área plana comprendida entre la parábola  $y = a^2 - x^2$  y el eje  $OX$ . Sol.:  $\frac{4a^5}{15}$ .
14. Calcular el momento de inercia con respecto al eje  $OZ$  del volumen del paraboloide de revolución  $z = x^2 + y^2$ , limitado por el plano  $z = a$ . Sol.:  $\frac{\pi a^3}{6}$ .
15. Calcular el momento de inercia del sólido interior al cono  $z^2 = x^2 + y^2$  para  $-4 \leq z \leq 4$  respecto de los ejes coordenados y respecto al origen (densidad  $\mu = \text{constante}$ ).  
Sol.:  $I_x = I_y = 512\pi\mu$ ,  $I_z = \frac{1024}{5}\pi\mu$ ,  $I_o = \frac{3072}{5}\pi\mu$ .
16. Calcular la masa y el centro de gravedad del sólido limitado por el hiperboloide de dos hojas  $x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0$  y el cilindro  $x^2 + y^2 - 9 = 0$ , y cuya densidad en cada punto es  $m(x, y, z) = \frac{5-z}{2}$ .
17. Calcular la masa  $M$  de la superficie  $S$  definida por  $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$  siendo la densidad en cada punto el cuadrado de la distancia de su proyección sobre el plano  $OXY$  al origen de coordenadas.
18. Dado el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  cuya densidad en cada punto es  $m(x, y, z) = abc - |xyz|$ , calcular su masa.
19. Hallar el centro de gravedad del área limitada por la parábola  $y = a - \frac{a}{b^2}x^2$  y el eje  $OX$ .
20. Calcular la masa del sólido limitado por el hiperboloide de dos hojas  $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  en el semiespacio  $z \geq 0$ , y cuya densidad en cada punto es  $m(x, y, z) = z^2$ .
21. Calcular la masa del cuerpo limitado por el hiperboloide de dos hojas  $x^2 + 4y^2 - z^2 + 4 = 0$  y el cilindro  $x^2 + 4y^2 - 9 = 0$ , y cuya densidad en cada punto es  $m(x, y, z) = 1 - \frac{z}{4}$ .
22. Calcular la masa del sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \quad y^2 \leq x \leq 2y^2, \quad z^2 \leq y \leq 2z^2, \quad x^2 \leq z \leq 2x^2\},$$

cuya densidad en cada punto es  $m(x, y, z) = xyz$ . Se aconseja tomar como nuevas variables

$$u = \frac{x}{y^2}, v = \frac{y}{z^2}, w = \frac{z}{x^2}.$$

#### Algunos cambios de coordenadas:

|                                                   |                                                                                              |                                                                |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| COORDENADAS CILINDRICAS<br>$ J  = r$              | $x = r \cos \theta$<br>$y = r \sin \theta$<br>$z = z$                                        | $r \geq 0$<br>$0 \leq \theta < 2\pi$<br>$z \in \mathbb{R}$     |
| COORDENADAS ESFERICAS<br>$ J  = r^2 \sin \varphi$ | $x = r \sin \varphi \cos \theta$<br>$y = r \sin \varphi \sin \theta$<br>$z = r \cos \varphi$ | $r \geq 0$<br>$0 \leq \theta < 2\pi$<br>$0 \leq \varphi < \pi$ |