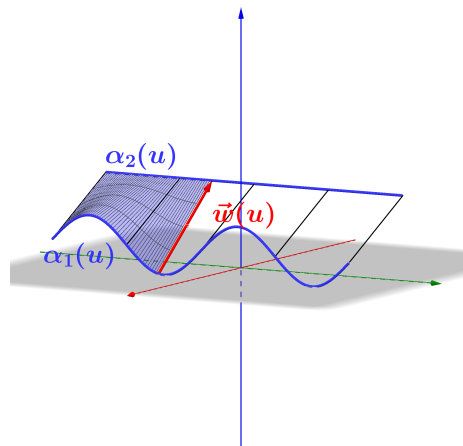


HOJA DE PROBLEMAS: SUPERFICIES REGLADAS

1 Parametrización de superficies regladas

Parametrizar las siguientes superficies regladas:

1. Superficie reglada formada por los segmentos que se apoyan en la curva con parametrización: $\alpha_1(u) = (3, u, 1 + \sin(u))$, $-2\pi \leq u \leq 2\pi$, y en la recta con parametrización $\alpha_2(u) = (-1, u, 3)$, $-2\pi \leq u \leq 2\pi$.



Solución.

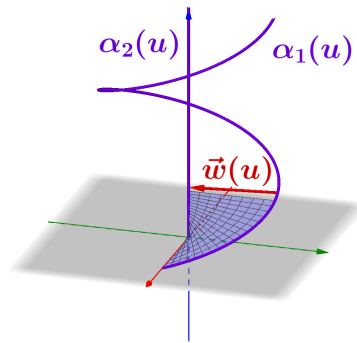
$$\begin{aligned} r(u, v) &= \alpha_1(u) + \vec{w}(u), \quad -2\pi \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1, \\ \text{con } \alpha_1(u) &= (3, u, 1 + \sin(u)) \text{ y} \\ \vec{w}(u) &= \overrightarrow{\alpha_1(u)\alpha_2(u)} = \alpha_2(u) - \alpha_1(u) = (-4, 0, 2 - \sin(u)). \end{aligned}$$

El parámetro de distribución es:

$$\begin{aligned} p(u) &= [\alpha_1'(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)] \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cos(u) \\ -4 & 0 & 2 - \sin(u) \\ 0 & 0 & \cos(u) \end{pmatrix} = 4 \cos(u) \text{ no idénticamente nulo} \end{aligned}$$

por tanto, la superficie es no desarrollable.

2. El **helicoides** es la superficie reglada por los segmentos que se apoyan en una hélice y en el eje de la misma. Parametrizar el helicoides formado por los segmentos que se apoyan en la hélice con parametrización: $\alpha_1(u) = (2 \cos(u), 2 \sin(u), u)$, $0 \leq u \leq 4\pi$, y en la recta con parametrización: $\alpha_2(u) = (0, 0, u)$, $0 \leq u \leq 4\pi$.



Solución.

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \alpha_1(u) + \vec{w}(u), \quad 0 \leq u \leq 4\pi, \quad 0 \leq v \leq 1, \\ \text{con } \alpha_1(u) &= (2 \cos(u), 2 \sin(u), u) \text{ y} \\ \vec{w}(u) &= \overrightarrow{\alpha_1(u)\alpha_2(u)} = \alpha_2(u) - \alpha_1(u) = (-2 \cos(u), -2 \sin(u), u). \end{aligned}$$

La parametrización de la superficie con curva directriz $\alpha_2(u)$ es:

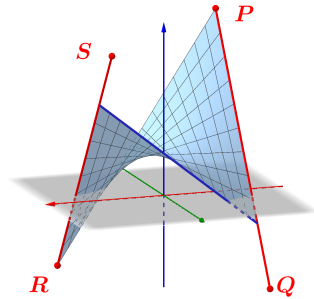
$$\begin{aligned} r(u, v) &= \alpha_2(u) + \vec{w}(u), \quad 0 \leq u \leq 4\pi, \quad 0 \leq v \leq 1, \\ \text{con } \alpha_2(u) &= (0, 0, u) \text{ y} \\ \vec{w}(u) &= \overrightarrow{\alpha_2(u)\alpha_1(u)} = \alpha_1(u) - \alpha_2(u) = (2 \cos(u), 2 \sin(u), -u). \end{aligned}$$

El parámetro de distribución es:

$$\begin{aligned} p(u) &= [\alpha_2'(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)] \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 \cos(u) & 2 \sin(u) & -u \\ -2 \sin(u) & 2 \cos(u) & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

La superficie es no desarrollable.

3. El **paraboloide hiperbólico** es la superficie reglada por los segmentos que se apoyan en dos segmentos no paralelos. Parametrizar el paraboloide hiperbólico formado por los segmentos que unen los puntos de los segmentos RS y PQ , como muestra el dibujo, siendo $P = (-1, 1, 0)$, $Q = (1, 1, 3)$, $R = (-1, -1, 3)$ y $S = (1, -1, 0)$.



Ejemplo: Pabellón Phillips de la Exposición Universal de Bruselas de 1958, diseñado por Le Corbusier e Iannis Xenaxis en el que destaca el paraboloide hiperbólico de la cubierta.

Solución. Los segmentos PQ y RS se parametrizan como sigue:

$$PQ : \quad \alpha_1(u) = P + u\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0) + u(2, 0, 3), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$RS : \quad \alpha_2(u) = R + u\overrightarrow{RS} = (-1, -1, 3) + u(2, 0, -3), \quad 0 \leq u \leq 1.$$

La parametrización de la superficie es:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \alpha_1(u) + \vec{w}(u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1, \\ \text{con } \alpha_1(u) &= (-1 + 2u, 1, 3u) \text{ y} \\ \vec{w}(u) &= \overrightarrow{\alpha_1(u)\alpha_2(u)} = \alpha_2(u) - \alpha_1(u) = (0, -2, 3 - 6u). \end{aligned}$$

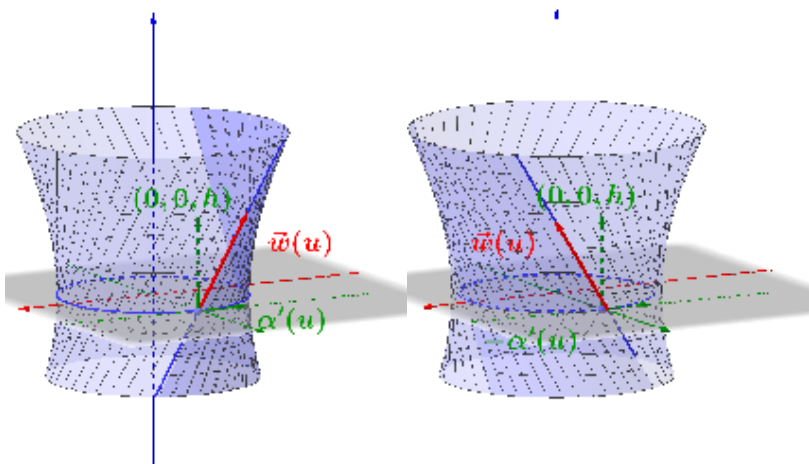
El parámetro de distribución es:

$$\begin{aligned} p(u) &= [\alpha_1'(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)] \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 - 6u \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 24 \neq 0. \end{aligned}$$

La superficie es no desarrollable.

4. Superficie reglada cuya directriz es una circunferencia, por ejemplo, la circunferencia parametrizada: $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, y tal que el vector director $\vec{w}(u)$ de la generatriz en cada punto de la circunferencia es un vector contenido en el plano rectificante de la curva en el punto $\alpha(u)$. Por tanto, $\vec{w}(u)$ es combinación lineal del vector tangente y el vector binormal a la curva en $\alpha(u)$; esto es,

$$\vec{w}(u) = \cos(\beta)\vec{t}(u) + \sin(\beta)\vec{b}(u), \text{ con } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$



Nótese que se excluyen los siguientes casos:

- $\beta = 0$, la recta es la recta tangente y en ese caso la superficie sería un plano.
- $\beta = \pi/2$ la recta es la recta binormal y en este caso la superficie sería un cilindro circular.

Solución. Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{t}(u) &= \alpha'(u) = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \\ \vec{b}(u) &= (0, 0, 1), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \end{aligned}$$

La parametrización de la superficie es:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \alpha(u) + \vec{w}(u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1, \\ \text{con } \alpha(u) &= (\cos(u), \sin(u), 0) \text{ y} \\ \vec{w}(u) &= \cos(\beta)\vec{t}(u) + \sin(\beta)\vec{b}(u) \\ &= \cos(\beta)(-\sin(u), \cos(u), 0) + \sin(\beta)(0, 0, 1) \\ &= (-\cos(\beta)\sin(u), \cos(\beta)\cos(u), \sin(\beta)). \end{aligned}$$

El parámetro de distribución es:

$$\begin{aligned} p(u) &= [\alpha'_1(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)] \\ &= \det \begin{pmatrix} \sin(u) & -\sin(u) & 0 \\ -\cos(\beta)\sin(u) & \cos(\beta)\cos(u) & \sin(\beta) \\ -\cos(\beta)\cos(u) & -\cos(\beta)\sin(u) & 0 \end{pmatrix} = -\sin(\beta)\cos(\beta) \end{aligned}$$

por tanto, si $\beta \neq 0, \pi/2$ la superficie es no desarrollable.

5. Superficie generada por los segmentos paralelos al plano $z = 0$ y que se apoyan en las curvas situadas en el primer octante:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x^2 + z^2 = 1, y = 0\} \\ C_2 &= \{y^2 + z^2 = 1, x = 0\}. \end{aligned}$$

Solución. Unas parametrizaciones de las curvas C_1 y C_2 son:

$$\begin{aligned} C_1 &: \alpha_1(u) = (\cos(u), 0, \sin(u)), \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \\ C_2 &: \alpha_2(t) = (0, \cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\overrightarrow{\alpha_1(u)\alpha_2(t)} = (-\cos(u), \cos(t), \sin(t) - \sin(u)).$$

Como queremos que $\overrightarrow{\alpha_1(u)\alpha_2(t)}$ sea paralelo al plano $z = 0$ se tiene: $\sin(t) - \sin(u) = 0$ y, por tanto, $t = u$.

Una parametrización de la superficie es:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \alpha_1(u) + \vec{w}(u), \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 1, \\ \text{con } \alpha_1(u) &= (\cos(u), 0, \sin(u)) \text{ y} \\ \vec{w}(u) &= \overrightarrow{\alpha_2(u)\alpha_1(u)} = (-\cos(u), \cos(u), 0). \end{aligned}$$

El parámetro de distribución es:

$$\begin{aligned} p(u) &= [\alpha_2'(u), \vec{w}(u), \vec{w}'(u)] \\ &= \det \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 & \cos(u) \\ -\cos(u) & \cos(u) & 0 \\ \sin(u) & -\sin(u) & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

La superficie es desarrollable.

s de superficies Se considera la superficie $\mathcal{S}$ con representación paramétrica

$$r(u, v) = (u^2 + uv + u, u, (v + 1)^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

y el punto $P = (1, 1, 0)$. Se pide:

- Calcular todos los puntos singulares de $\mathcal{S}$.
- Determinar la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en P .
- Determinar una parametrización de la recta normal a $\mathcal{S}$ en P .
- Calcular la matriz de la primera forma fundamental.
- Determinar una parametrización de las curvas coordenadas de $\mathcal{S}$ que contienen a P . ¿Qué ángulo forman estas líneas coordenadas?
- Se considera la curva contenida en la superficie dada por $\gamma(t) = r(2t - 1, t - 2)$ con $t \in \mathbb{R}$ que pasa por P . Calcular el ángulo forma γ con la curva paramétrica $u = 1$.
- Calcular la matriz de la segunda forma fundamental de $\mathcal{S}$ en P .
- Hallar las direcciones principales expresadas como vectores de $\mathbb{R}^3$ y las curvaturas principales de $\mathcal{S}$ en P .
- Calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media en P . Clasificar el punto P .
- Hallar las direcciones asintóticas de $\mathcal{S}$ en P , expresadas como vectores de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Se tiene:

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= (2u + v + 1, 1, 0), \\ r_v(u, v) &= (u, 0, 2(v + 1)), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_u(u, v) \wedge r_v(u, v) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2u + v + 1 & 1 & 0 \\ u & 0 & 2(v + 1) \end{pmatrix} \\ &= (2(v + 1), -(2u + v + 1)2(v + 1), -u), \end{aligned}$$

luego $r_u(u, v) \wedge r_v(u, v) = \vec{0}$ si y sólo si $u = 0$ y $v = -1$. El único punto singular es el punto $r(0, -1) = (0, 0, 0)$.

El vector normal a la superficie en un punto arbitrario es:

$$\begin{aligned} \vec{N}(u, v) &= \frac{r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4(v + 1)^2 + (2u + v + 1)^2 4(v + 1)^2 + u^2}} (2(v + 1), -(2u + v + 1)2(v + 1), -u). \end{aligned}$$

En $P = (1, 1, 0) = r(1, -1)$ se tiene:

$$\vec{N}(1, -1) = (0, 0, -1).$$

La ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie en P es: $z = 0$.

La matriz de la primera forma fundamental en un punto arbitrario es:

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= (2u + v + 1, 1, 0), \\ r_v(u, v) &= (u, 0, 2(v + 1)), \\ I_{r(u, v)} &= \begin{pmatrix} (2u + v + 1)^2 + 1 & u(2u + v + 1) \\ u(2u + v + 1) & u^2 + 4(v + 1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Una parametrización de la recta normal en P son:

$$r(\lambda) = P + \lambda \vec{N}(1, -1) = (1, 1, -\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Las curvas coordenadas de $\mathcal{S}$ que contienen a P son:

$$\begin{aligned} r(1, v) &= (2 + v, 1, (v + 1)^2), \quad v \in \mathbb{R}, \\ r(u, -1) &= (u^2, u, 0), \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

¿Qué ángulo forman estas líneas coordenadas? La matriz de la primera forma fundamental en P es:

$$I_P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El ángulo que forman las líneas coordenadas en P es:

$$\cos \beta = \frac{(1, 0) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(1, 0) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \sqrt{(0, 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Se considera la curva contenida en la superficie dada por $\gamma(t) = r(2t - 1, t - 2)$ con $t \in \mathbb{R}$ que pasa por P . Calcular el ángulo forma γ con la curva paramétrica $u = 1$.

Se tiene:

$$\gamma'(t) = 2r_u(2t - 1, t - 2) + r_v(2t - 1, t - 2) \equiv (2, 1),$$

y el vector tangente a la curva paramétrica $u = 1$ es $r_v(1, v) \equiv (0, 1)$. Por tanto el coseno del ángulo que forman es:

$$\cos \beta = \frac{(2, 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(2, 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \sqrt{(0, 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

La matriz de la segunda forma fundamental en un punto genérico es:

$$\begin{aligned} r_{uu}(u, v) &= (2, 0, 0), \\ r_{uv}(u, v) &= (1, 0, 0), \\ r_{vv}(u, v) &= (0, 0, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(u, v) &= r_{uu}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{1}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|} 4(v+1), \\M(u, v) &= r_{uv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{1}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|} 2(v+1), \\N(u, v) &= r_v(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{-2u}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|},\end{aligned}$$

$$II_{r(u, v)} = \frac{1}{\|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\|} \begin{pmatrix} 4(v+1) & 2(v+1) \\ 2(v+1) & -2u \end{pmatrix}.$$