

1 Estudio local de una superficie

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con parametrización regular:

$$\begin{aligned}\vec{r}: D &\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u, v) &= (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \\ \vec{r}_v(u, v) &= (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)).\end{aligned}$$

Un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ es *tangente a la superficie* S en P si es tangente en P a una curva contenida en S .

Sea C una curva contenida en la superficie; $C \subset S$. Por tanto, una representación paramétrica de C es de la forma:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos:

$$\vec{\gamma}'(t) = \vec{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \vec{r}_v(u(t), v(t))v'(t).$$

Por tanto, cualquier vector tangente a la superficie S se escribe como combinación lineal de los vectores $\vec{r}_u(u, v)$, $\vec{r}_v(u, v)$.

Llamamos *vector normal unitario* a la superficie S en el punto $P = \vec{r}(u_0, v_0)$ al vector:

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \wedge \vec{r}_v(u_0, v_0)}{\|\vec{r}_u(u_0, v_0) \wedge \vec{r}_v(u_0, v_0)\|}.$$

1.1 Primera forma fundamental

Llamamos *primera forma fundamental* de S en $P = \vec{r}(u_0, v_0)$ a la forma bilineal simétrica definida positiva I_P asociada al producto escalar inducido en el plano tangente a S en P por el producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

1.1.1 Cálculo de la expresión analítica de la primera forma fundamental

Cualquier vector $\vec{w} \in T_P S$ se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{w} = h(u_0, v_0) \vec{r}_u(u_0, v_0) + k(u_0, v_0) \vec{r}_v(u_0, v_0),$$

siendo $h, k \in C^\infty(D)$.

Tenemos:

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = (h_1(u_0, v_0), k_1(u_0, v_0)) \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2(u_0, v_0) \\ k_2(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \vec{r}_u(u_0, v_0) \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) > 0, \\ F(u_0, v_0) &= \vec{r}_u(u_0, v_0) \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) &= \vec{r}_v(u_0, v_0) \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0) > 0. \end{aligned}$$

Esto es,

$$I_P: T_P S \times T_P S \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$I_P(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (h_1(u_0, v_0), k_1(u_0, v_0)) \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2(u_0, v_0) \\ k_2(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

siendo

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= h_1(u_0, v_0) \vec{r}_u(u_0, v_0) + k_1(u_0, v_0) \vec{r}_v(u_0, v_0), \\ \vec{w}_2 &= h_2(u_0, v_0) \vec{r}_u(u_0, v_0) + k_2(u_0, v_0) \vec{r}_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Haciendo algunos cálculos se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{traza} \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} &= E(u_0, v_0) + G(u_0, v_0) > 0, \\ \det \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} &= E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2 \\ &= \|\vec{r}_u(u_0, v_0) \wedge \vec{r}_v(u_0, v_0)\|^2 > 0. \end{aligned}$$

1.2 Segunda forma fundamental

En el estudio de curvas, la curvatura medía la tasa de variación de la recta tangente en el entorno de un punto de la curva. Extendemos esta idea al estudio de superficies. Vamos a medir la distancia entre la superficie y el plano tangente a la superficie en un punto $P \in S$, en puntos de la superficie próximos al punto P . Para ello vamos a estudiar cómo varía el campo normal unitario $\vec{N}$ en un entorno del punto P .

Sea una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con representación paramétrica regular

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \text{ con } (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

de clase mayor o igual a 3. El campo normal unitario $\vec{N}$ asigna a cada punto P de la superficie, con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v)$, su vector normal unitario; esto es,

$$\vec{N}: D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{N}(u, v) = \frac{\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v)}{\|\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v)\|}.$$

Usaremos la notación $\vec{N}(u, v)$, $\vec{N}_P$ indistintamente. Y denotaremos $D\vec{N}_P(\vec{w})$ a la derivada direccional de la aplicación $\vec{N}$ en el punto P y en la dirección del vector unitario $\vec{w}$ tangente a la superficie en el punto P .

Se verifica lo siguiente:

$$D\vec{N}_P(\vec{w}) \in T_P S.$$

Por tanto, tenemos la siguiente aplicación, que llamamos *aplicación de Weingarten*:

$$\begin{aligned} S: T_P S &\longrightarrow T_P S, \\ \vec{w} &\longmapsto S(\vec{w}) = -D\vec{N}_P(\vec{w}). \end{aligned}$$

Llamamos *segunda forma fundamental* de S en P a la forma cuadrática II_P definida en $T_P S$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} II_P: T_P S &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \vec{w} &\longmapsto II_P(\vec{w}) = -D\vec{N}_P(\vec{w}) \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Cualquier vector $\vec{w} \in T_P S$ se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{w} = h(u, v) \vec{r}_u(u, v) + k(u, v) \vec{r}_v(u, v),$$

y se verifica:

$$\begin{aligned} II_P(\vec{w}) &= -D\vec{N}_P(\vec{w}) \cdot \vec{w} \\ &= (h(u, v), k(u, v)) \begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(u, v) \\ k_1(u, v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde después de hacer ciertos cálculos se comprueba que

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \vec{r}_{uu}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v), \\ M(u, v) &= \vec{r}_{uv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v), \\ N(u, v) &= \vec{r}_{vv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v). \end{aligned}$$

1.2.1 Matriz asociada a la aplicación de Weingarten

Haciendo algunos cálculos se demuestra que la matriz asociada a la aplicación de Weingarten:

$$S: T_P S \longrightarrow T_P S, \quad \vec{w} \longmapsto S(\vec{w}) = -D\vec{N}_P(\vec{w}),$$

es

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

1.3 Curvatura normal

Sea S una superficie con parametrización $\vec{r}(u, v)$ y sea C una curva contenida en la superficie con parametrización natural:

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{r}(u(s), v(s)), \text{ con } s \in I \subseteq \mathbb{R},$$

y sea P un punto arbitrario de la curva; esto es, $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(s)$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \vec{\gamma}'(s), \\ \vec{k}(s) &= \vec{t}'(s) = k(s)\vec{n}(s), \text{ vector curvatura de la curva } C \text{ en } P. \end{aligned}$$

Descomponemos el vector curvatura de la siguiente manera:

$$\vec{k}(s) = \vec{k}_N(s) + \vec{k}_g(s) \text{ donde } \begin{cases} \vec{k}_N(s) = (\vec{k}(s) \cdot \vec{N}_P) \vec{N}_P, \\ \vec{k}_g(s) = \vec{k}(s) - \vec{k}_N(s). \end{cases}$$

Llamamos *vector curvatura normal* a la proyección del vector curvatura sobre el vector curvatura normal de la superficie $\vec{N}_P$; esto es,

$$\vec{k}_N(s) = \left(\vec{k}(s) \cdot \vec{N}_P \right) \vec{N}_P.$$

Se denomina *curvatura normal en un punto P* de la superficie en la dirección de la curva C con parametrización $\vec{r}(s)$ a:

$$k_N(s) = \vec{k}(s) \cdot \vec{N}_P = \vec{t}'(s) \cdot \vec{N}_P.$$

Y llamamos *vector curvatura tangencial o geodésica* al vector $\vec{k}_g(s)$. Derivando la identidad $\vec{t}(s) \cdot \vec{N}_P = 0$ obtenemos:

$$0 = \vec{t}'(s) \cdot \vec{N}_P + \vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{N}_P}{ds} = k_N(s) + \vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{N}_P}{ds},$$

donde $d\vec{N}_P/ds$ es la derivada del campo $\vec{N}$ en el punto P en la dirección del vector $\vec{r}'(s)$; esto es,

$$\frac{d\vec{N}_P}{ds}(s) = D\vec{N}_P(\vec{\gamma}'(s))$$

con

$$\vec{\gamma}'(s) = \vec{r}_u(u(s), v(s))u'(s) + \vec{r}_v(u(s), v(s))v'(s).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} k_N(s) &= -\frac{d\vec{N}_P}{ds} \cdot \vec{t}(s) \\ &= -D\vec{N}_P(\vec{\gamma}'(s)) \cdot \vec{\gamma}'(s) = II_P(\vec{\gamma}'(s)). \end{aligned}$$

Si

$$\vec{\phi}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \text{ con } t \in J \subseteq \mathbb{R},$$

es una parametrización arbitraria de la curva C , entonces, el vector $\vec{\gamma}'(t)$ no es unitario y se verifica la siguiente igualdad:

$$k_N(t) = \frac{II_P(\vec{\phi}'(t))}{I_P(\vec{\phi}'(t), \vec{\phi}'(t))}.$$

Obsérvese que $k_N(t)$ sólo depende de la dirección del vector tangente a la curva en el punto P .

1.3.1 Teorema de Meusnier

Todas las curvas sobre la superficie que tienen la misma recta tangente en el punto P , tienen la misma curvatura normal en P .

Se puede hablar de curvatura normal a una superficie en un punto P en la dirección de un vector $\vec{w} \in T_P S$; esto es,

$$k_N(\vec{w}) = \frac{II_P(\vec{w})}{I_P(\vec{w}, \vec{w})}.$$

Nota. Si las coordenadas del vector $\vec{w} \in T_P S$ en la base $\{\vec{r}_u(u, v), \vec{r}_v(u, v)\}$ de $T_P S$ son $(h(u, v), k(u, v))$ entonces usaremos también la notación:

$$k_N(h, k) = \frac{II_P((h, k))}{I_P((h, k))},$$

donde $h = h(u, v)$, $k = k(u, v)$.

1.4 Naturaleza de los puntos de una superficie

Vamos a estudiar la posición de la superficie con respecto a su plano tangente. El vector $\vec{k}_N(u, v) = k_N(u, v)\vec{N}_P(u, v)$ tiene la dirección del vector normal a la superficie en el punto P con $\vec{OP} = \vec{r}(u, v)$ y su sentido depende del signo de la curvatura normal. Teniendo en cuenta la primera forma fundamental es definida positiva, el signo de la curvatura normal depende únicamente de la segunda forma fundamental. La matriz de la segunda forma fundamental es:

$$\begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix}$$

y su determinante es: $\Delta = LN - M^2$. Se tiene:

$\Delta > 0$ Entonces II_P es definida (o positiva o negativa). Por lo tanto no hay ninguna dirección en la que k_N se anule (todos los autovalores de la matriz de II_P tienen el mismo signo). La curvatura normal tiene signo constante en un entorno del punto P . En un entorno de P la superficie está en uno de los semiespacios que determina el plano tangente a S en P . El punto P se dice que es un punto *elíptico*.

$\Delta = 0$ Y suponemos que L, M, N no se anulan simultáneamente. Por tanto, $\Delta = LN - M^2 = 0$ nos indica que la matriz de II_P tiene un autovalor

$\lambda = 0$; esto es, existe una dirección a lo largo de la cual $k_N = 0$. En este caso el punto de contacto de la superficie con el plano tangente se dice que es un punto *parabólico*.

$\Delta < 0$ Entonces II_P es indefinida. Por lo tanto la matriz de II_P tiene un autovalor positivo y otro negativo; esto es, existe una dirección a lo largo de la cual $k_N > 0$ y otra a lo largo de la cual $k_N < 0$. El plano tangente a S en P interseca a la superficie en dos direcciones. El punto P se dice que es un punto *hiperbólico*.

1.5 Curvaturas de una superficie

De todas las direcciones del plano tangente a la superficie S en un punto P , es interesante determinar aquellas en las que la curvatura normal en el punto alcanza sus valores extremos.

1.5.1 Direcciones principales

Se llaman *direcciones principales de S en P* a las direcciones del plano tangente a S en P en las que la curvatura normal toma sus valores extremos. A las curvaturas correspondientes las denominaremos *curvaturas principales*.

Cálculo de las direcciones principales Vamos a hallar las direcciones principales de una superficie S en un punto P con curvatura normal:

$$k_N((h, k)) = \frac{II_P((h, k))}{I_P((h, k))} = \frac{Lh^2 + 2Mhk + Nk^2}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2}.$$

En las direcciones $\vec{v} = (h, k) \in T_P S$ principales se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_N}{\partial h}(h, k) &= 0, \\ \frac{\partial k_N}{\partial k}(h, k) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto las direcciones principales $(h, k) \in T_P S$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (L - k_N E)h + (M - k_N F)k = 0, \\ (M - k_N F)h + (N - k_N G)k = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} Lh + Mk = k_N(Eh + Fk), \\ Mh + Nk = k_N(Fh + Gk). \end{cases} \quad (1)$$

Por tanto,

$$k_N = \frac{Lh + Mk}{Eh + Fk} = \frac{Mh + Nk}{Fh + Gk},$$

equivalentemente,

$$0 = (FN - GM) k^2 - (GL - NE) hk + (EM - FL) h^2$$

esto es,

$$0 = \begin{vmatrix} k^2 & -hk & h^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

Tomando la dirección $(1, \lambda = k/h)$ tenemos:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = (FN - GM) \lambda^2 - (GL - NE) \lambda + EM - FL.$$

Si $FN - GM \neq 0$, las soluciones λ_1, λ_2 de esta ecuación de segundo grado en λ nos da las dos direcciones principales: $(1, \lambda_1), (1, \lambda_2)$. Se demuestra que los vectores $(1, \lambda_1), (1, \lambda_2)$ son ortogonales; esto es,

$$\begin{aligned} I_P((1, \lambda_1), (1, \lambda_2)) &= E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G\lambda_1\lambda_2 \\ &= E + F \frac{GL - NE}{FN - GM} + G \frac{EM - FL}{FN - GM} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definición. Un punto $P \in S$ se dice *umbilical* si las formas fundamentales en él son proporcionales; equivalentemente, si

$$k_N = \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

En los puntos umbilicales todas las direcciones se pueden considerar principales. Un caso particular de punto umbilical es un punto *plano*, en el que se anula la segunda forma fundamental y, por tanto, $k_N = 0$ en cualquier dirección.

1.5.2 Curvaturas principales

Vamos a hallar las curvaturas principales de una superficie S en un punto P . Tomando la dirección $(1, \lambda)$ la ecuación

$$k_N(h, k) = \frac{Lh + Mk}{Eh + Fk} = \frac{Mh + Nk}{Fh + Gk},$$

se escribe:

$$k_N(1, \lambda) = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} \iff \begin{cases} (L + M\lambda) - k_N(E + F\lambda) = 0 \\ (M + N\lambda) - k_N(F + G\lambda) = 0 \end{cases}$$

y eliminando λ en el sistema anterior obtenemos:

$$(EG - F^2)k_N^2 - (EN + GL - 2FM)k_N + LN - M^2 = 0$$

esto es,

$$\left| \begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array} \right| k_N^2 - \left\{ \left| \begin{array}{cc} E & M \\ F & N \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} L & F \\ M & G \end{array} \right| \right\} k_N + \left| \begin{array}{cc} L & M \\ M & N \end{array} \right| = 0$$

cuyas soluciones k_1, k_2 son las curvaturas principales.

El discriminante de la ecuación anterior es siempre mayor o igual que cero, y por tanto, las soluciones de dicha ecuación siempre son reales.

Otro camino para calcular las curvaturas principales y las direcciones principales Nótese que la ecuación anterior es la ecuación característica de la matriz asociada a la aplicación de Weingarten $S(\vec{w}) = -D\vec{N}_P(\vec{w})$,

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

por tanto, las direcciones principales son los autovalores de la matriz anterior. Y las direcciones principales son los correspondientes autovectores (que son vectores ortogonales).

Por tanto las curvaturas principales k_1, k_2 y las correspondientes direcciones principales $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (que son vectores ortogonales que tomamos unitarios) satisfacen:

$$\begin{cases} S(\vec{e}_1) = k_1 \vec{e}_1 \\ S(\vec{e}_2) = k_2 \vec{e}_2 \end{cases}$$

1.5.3 Curvatura de Gauss y curvatura media

Definición. Se denomina *curvatura de Gauss o total* de una superficie S en un punto $P \in S$ al producto de las curvaturas principales; esto es,

$$K_G = k_1 k_2 = \det(A) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Teniendo en cuenta $EG - F^2 > 0$ se deduce que el signo de la curvatura total depende del signo de $LN - M^2$. Se tiene:

1. Un punto P de la superficie es elíptico si y sólo si $K_G > 0$.
2. Un punto P de la superficie es parabólico si y sólo si $K_G = 0$.
3. Un punto P de la superficie es hiperbólico si y sólo si $K_G < 0$.

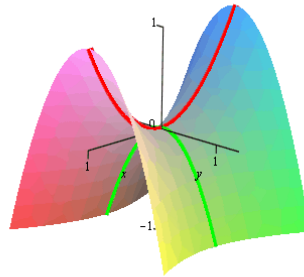
Definición. Se denomina *curvatura media* de una superficie S en un punto $P \in S$ a la media aritmética de las curvaturas principales; esto es,

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} = \text{traza}(A) = \frac{1}{2} \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}.$$

1.6 Líneas de curvatura y líneas asintóticas

Definición. Una curva C contenida en una superficie S se denomina *línea de curvatura* si la dirección del vector tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección principal en ese punto.

Véase el siguiente gráfico en el que se muestran las líneas de curvatura en el punto $(0, 0, 0)$ de la superficie con ecuación $z = x^2 - y^2$:



Líneas de curvatura

Sea S una superficie con parametrización $\vec{r}(u, v)$ y sea C una curva contenida en la superficie con parametrización:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \text{ con } t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

y sea P un punto arbitrario de la curva; esto es, $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(t)$. La curva C es una línea de curvatura si las coordenadas $(u'(t), v'(t))$ del vector $\vec{\gamma}'(t)$ en la base $\{\vec{r}_u(u(t), v(t)), \vec{r}_v(u(t), v(t))\}$ de $T_P S$ son solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = (FN - GM)(v'(t))^2 - (GL - NE)u'(t)v'(t) + (EM - FL)(u'(t))^2$$

esto es,

$$0 = \begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

Definición. Una dirección se denomina *asintótica* respecto a un punto P de S si se anula en ella la segunda forma fundamental en P ; esto es, la dirección del vector $\vec{w} = (h, k)$ es *asintótica* si

$$II_P(h, k) = 0.$$

Definición. Una curva C contenida en una superficie S se denomina *línea asymptótica* si la dirección del vector tangente en cada uno de sus puntos coincide con una dirección *asintótica*.

La curva C es una línea *asintótica* si las coordenadas $(u'(t), v'(t))$ del vector $\vec{\gamma}'(t)$ en la base $\{\vec{r}_u(u(t), v(t)), \vec{r}_v(u(t), v(t))\}$ de $T_P S$ son solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = L(u'(t))^2 + 2Mu'(t)v'(t) + N(v'(t))^2.$$

1.7 Fórmula de Euler

Vamos a expresar la curvatura normal en una dirección que forme un ángulo α con respecto a una de las direcciones principales en función de ese ángulo α y de las curvaturas principales.

Sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ los autovectores (unitarios) de la aplicación de Weingarten, esto es, son las direcciones principales asociadas a las curvaturas principales

k_1 y k_2 (que son los autovalores de la matriz de la aplicación de Weingarten). Por tanto, se tiene:

$$-D\vec{N}_P(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1, \quad -D\vec{N}_P(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2$$

Vamos a calcular la curvatura normal en el punto P en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$. Por tanto, $\vec{u}$ se escribe como sigue:

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2$$

y se tiene:

$$\begin{aligned} k_N(\vec{u}) &= -D\vec{N}_P(\vec{u}) \cdot \vec{u} = -D_{\vec{u}}\vec{N}_P \cdot \vec{u} \\ &= -D_{(\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2)}\vec{N}_P \cdot (\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2) \\ &= -\left(\cos \alpha D_{\vec{e}_1}\vec{N}_P + \sin \alpha D_{\vec{e}_2}\vec{N}_P\right) \cdot (\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2) \\ &= (k_1 \cos \alpha \vec{e}_1 + k_2 \sin \alpha \vec{e}_2) \cdot (\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2) \\ &= k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

que es la *fórmula de Euler*.

1.8 Ejemplos

Ejemplo 1 Consideramos el semicono circular de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \text{ con } z \geq 0.$$

Podemos considerar la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}: [0, 2\pi) \times [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha, t) &= (t \cos \alpha, t \sin \alpha, t). \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, t) &= (-t \sin \alpha, t \cos \alpha, 0), \\ \vec{r}_t(\alpha, t) &= (\cos \alpha, \sin \alpha, 1), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, t) \wedge \vec{r}_t(\alpha, t) &= (t \cos \alpha, t \sin \alpha, -t \sin^2 \alpha - t \cos^2 \alpha) \\ &= (t \cos \alpha, t \sin \alpha, -t). \end{aligned}$$

Por tanto, $\vec{r}_\alpha(\alpha, t) \wedge \vec{r}_t(\alpha, t) = \vec{0}$ si y sólo si $t = 0$. En el punto $P = (0, 0, 0)$ es un punto singular y no podemos definir el plano tangente al cono en dicho punto. Nótese también que el punto P es un punto múltiple para dicha parametrización ya que:

$$\vec{r}(\alpha, 0) = \overrightarrow{OP}, \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi).$$

Ejemplo 2 *Superficie de revolución.* Consideramos la superficie generada al girar alrededor del eje OZ la curva de ecuación $z = f(x)$, donde f es una función continua con derivadas continuas de todo orden, contenida en el plano $y = 0$.

Primero parametrizamos la curva que tenemos. En este caso una parametrización de la curva con ecuación $z = f(x)$ es: $\vec{s}(u) = (u, 0, f(u))$, con $u \in \mathbb{R}$. La matriz del giro de ángulo α alrededor del eje OZ es:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al girar la curva dada alrededor del eje OZ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ f(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos \alpha \\ u \sin \alpha \\ f(u) \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in [0, 2\pi).$$

Por tanto, una representación paramétrica de dicha superficie viene dada por:

$$\begin{aligned} \vec{r}: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(u, \alpha) &= (u \cos \alpha, u \sin \alpha, f(u)). \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, \alpha) &= (\cos \alpha, \sin \alpha, f'(u)), \\ \vec{r}_\alpha(u, \alpha) &= (-u \sin \alpha, u \cos \alpha, 0). \end{aligned}$$

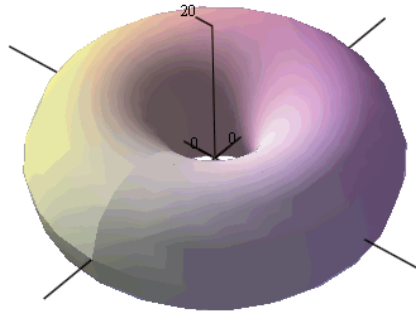
Por tanto,

$$\vec{r}_u(u, \alpha) \wedge \vec{r}_\alpha(u, \alpha) = (-uf'(u) \cos \alpha, uf'(u) \sin \alpha, u) \neq \vec{0}$$

pues $u \neq 0$. Luego el punto P con coordenadas $(0, 0, f(0))$ es un punto singular. Nótese que el punto P es un punto múltiple para dicha parametrización ya que:

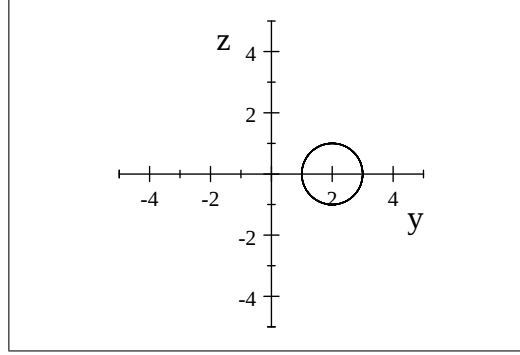
$$\vec{r}(u, \alpha) = (0, 0, f(0)) \text{ para todo } \alpha \in [0, 2\pi).$$

Ejemplo 3 *Toro*. Superficie generada al girar alrededor del eje OZ una circunferencia de centro $(0, b, 0)$ y radio a con $a < b$. Véase la siguiente figura:



Toro

Por ejemplo, consideremos la circunferencia de centro $C = (0, 2, 0)$ y radio 1.



Parametrizamos primero dicha circunferencia. Un punto de la circunferencia es de la forma: $(0, 2 + \cos \alpha, \sin \alpha)$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$. Al girarlo alrededor del eje OZ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \beta (\cos \alpha + 2) \\ \cos \beta (\cos \alpha + 2) \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

con $\beta \in [0, 2\pi)$. Hemos obtenido la siguiente parametrización del toro:

$$\begin{aligned} \vec{r}: [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha, \beta) &= (-\sin \beta (\cos \alpha + 2), \cos \beta (\cos \alpha + 2), \sin \alpha). \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} x(\alpha, \beta) &= -\sin \beta (\cos \alpha + 2), \\ y(\alpha, \beta) &= \cos \beta (\cos \alpha + 2), \\ z(\alpha, \beta) &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\cos \alpha + 2)^2 = \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 4 \\ &= 1 - \sin^2 \alpha + 4\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + 4 \\ &= 5 - z^2 + 4\sqrt{1 - z^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 5)^2 = 16(1 - z^2)$$

es la ecuación implícita del toro.

Ejemplo 4 Se considera la siguiente parametrización del toro:

$$\begin{aligned}\vec{r}: [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha, \beta) &= ((\cos \alpha + 2) \cos \beta, (\cos \alpha + 2) \sin \beta, \sin \alpha).\end{aligned}$$

Se pide:

1. Curvatura normal en el punto P de coordenadas $(2, 0, 1)$.
2. Direcciones principales en el punto P .
3. Curvaturas principales en el punto P .
4. Curvatura de Gauss en el punto P .
5. Curvatura media en el punto P .
6. Clasificar los puntos del toro.

Solución.

El punto P se alcanza para los valores de los parámetros $\alpha = \pi/2$ y $\beta = 0$.
Tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) &= (-\sin \alpha \cos \beta, -\sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha), \\ \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= -(\cos \alpha + 2) \sin \beta, (\cos \alpha + 2) \cos \beta, 0),\end{aligned}$$

y

$$\vec{N}(\alpha, \beta) = \frac{\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)}{\|\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)\|} = (-\cos \alpha \cos \beta, -\cos \alpha \sin \beta, -\sin \alpha).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}E(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) = 1, \\ F(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = 0, \\ G(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = (\cos \alpha + 2)^2,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}L(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = 1, \\ M(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = 0, \\ N(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = \cos \alpha (\cos \alpha + 2).\end{aligned}$$

Luego,

$$II_P(h, k) = h^2 + \cos \alpha (\cos \alpha + 2) k^2.$$

Por tanto, la matriz de la primera forma fundamental de S en el punto P es:

$$\begin{pmatrix} E(\pi/2, 0) & F(\pi/2, 0) \\ F(\pi/2, 0) & G(\pi/2, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y la matriz de la segunda forma fundamental de S en el punto P es:

$$\begin{pmatrix} L(\pi/2, 0) & M(\pi/2, 0) \\ M(\pi/2, 0) & N(\pi/2, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La curvatura normal en la dirección del vector $\vec{w} \in T_P S$ con coordenadas (h, k) es:

$$k_N(h, k) = \frac{II_P(h, k)}{I_P(h, k)} = \frac{h^2}{h^2 + 4k^2}.$$

Las direcciones principales $(1, \lambda)$ en P son las soluciones de la ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\lambda \implies \lambda = 0.$$

Si tomamos el vector de coordenadas $(\lambda, 1)$, entonces la ecuación se escribe:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\lambda \implies \lambda = 0.$$

Por tanto, las direcciones principales son las de los vectores de coordenadas $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Las curvaturas principales son:

$$\begin{aligned} k_N(1, 0) &= \frac{II_P(1, 0)}{I_P(1, 0)} = 1, \\ k_N(0, 1) &= \frac{II_P(0, 1)}{I_P(0, 1)} = 0. \end{aligned}$$

Si consideramos la ecuación de las curvaturas principales:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} k_N^2 - \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right\} k_N + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

obtenemos:

$$4(k_N - 1)k_N = 0 \implies \begin{cases} k_N = 1 \\ k_N = 0 \end{cases}$$

La curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales: $k_1 k_2 = 0$ y la curvatura media es $(k_1 + k_2)/2 = 1/2$.

Teniendo en cuenta que la matriz de la segunda forma fundamental de S en un punto P , con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(\alpha, \beta)$, es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha (\cos \alpha + 2) \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha (\cos \alpha + 2) \end{pmatrix} = \cos \alpha (\cos \alpha + 2).$$

Como $\cos \alpha + 2 > 0$, el signo de Δ depende del signo de $\cos \alpha$.

Si $\alpha \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$, entonces $\Delta > 0$ y los puntos son elípticos.

Si $\alpha \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, entonces $\Delta = 0$ y los puntos son parabólicos.

Si $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ entonces $\Delta < 0$ y los puntos son hiperbólicos.

Ejemplo 5 Consideramos la semiesfera superior de radio r y centrada en el origen; esto es, la semiesfera de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \text{ con } z \geq 0.$$

Consideramos la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}: [0, 2\pi) \times (0, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha, \beta) &= (a \cos \alpha \sin \beta, a \sin \alpha \sin \beta, a \cos \beta), \end{aligned}$$

donde α mide la longitud y β la latitud. Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) &= (-a \sin \alpha \sin \beta, a \cos \alpha \sin \beta, 0), \\ \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (a \cos \alpha \cos \beta, a \sin \alpha \cos \beta, -a \sin \beta), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (-a^2 \cos \alpha \sin^2 \beta, -a^2 \sin \alpha \sin^2 \beta, -a^2 \sin \beta \cos \beta) \\ &= -a^2 \sin \beta (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta). \end{aligned}$$

Por tanto, $\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = \vec{0}$ si y sólo si $\sin \beta = 0$; esto es, si y sólo si $\beta = 0$. Luego, la parametrización que tenemos es regular.

Ejemplo 6 *Esfera.* Consideramos la siguiente parametrización de la esfera de radio 1 y centro el origen de coordenadas:

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha), \quad (\alpha, \beta) \in (-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi).$$

Se pide:

1. Expresión de la primera forma fundamental.

(a) Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) &= (-\sin \alpha \cos \beta, -\sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha), \\ \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (-\cos \alpha \sin \beta, \cos \alpha \cos \beta, 0).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}E(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) = \sin^2 \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \cos^2 \alpha = 1, \\ F(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \alpha \cos \beta \cos \beta = 0, \\ G(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = \cos^2 \alpha (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \cos^2 \alpha.\end{aligned}$$

La matriz asociada a la primera forma fundamental en un punto arbitrario $P = \vec{r}(\alpha, \beta)$ de la superficie es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Como $F = 0$ las curvas coordenadas $\vec{r}(\alpha_0, \beta)$ (paralelo) y $\vec{r}(\alpha, \beta_0)$ (meridiano) son ortogonales entre si.

2. La longitud de la curva parámetro $\beta = \beta_0$.

(a) La curva parámetro $\beta = \beta_0$ (meridiano $\beta = \beta_0$) tiene la siguiente parametrización:

$$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\alpha, \beta_0) = (\cos \alpha \cos \beta_0, \cos \alpha \sin \beta_0, \sin \alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Se tiene:

$$\vec{r}'(\alpha) = \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta_0) = 1 \cdot \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta_0) + 0 \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta_0),$$

por tanto $(1, 0)$ son las coordenadas del vector tangente $\vec{r}'(\alpha)$ en la base $\{\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta_0), \vec{r}_\beta(\alpha, \beta_0)\}$ y

$$I_{\vec{r}(\alpha)}(\vec{r}'(\alpha), \vec{r}'(\alpha)) = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Por tanto,

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \pi.$$

3. La longitud de la curva parámetro $\alpha = \alpha_0$.

(a) La curva parámetro $\alpha = \alpha_0$ (paralelo $\alpha = \alpha_0$) tiene la siguiente parametrización:

$$\vec{r}(\beta) = \vec{r}(\alpha_0, \beta) = (\cos \alpha_0 \cos \beta, \cos \alpha_0 \sin \beta, \sin \alpha_0), \quad \alpha \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Se tiene:

$$\vec{r}'(\beta) = \vec{r}_\beta(\alpha_0, \beta) = 0 \cdot \vec{r}_\alpha(\alpha_0, \beta) + 1 \cdot \vec{r}_\beta(\alpha_0, \beta),$$

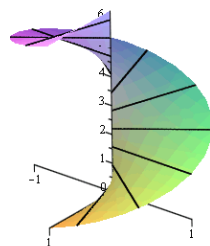
por tanto $(0, 1)$ son las coordenadas del vector tangente $\vec{r}'(\beta)$ en la base $\{\vec{r}_\alpha(\alpha_0, \beta), \vec{r}_\beta(\alpha_0, \beta)\}$ y

$$I_{\vec{r}(\beta)}(\vec{r}'(\beta), \vec{r}'(\beta)) = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos^2 \alpha_0.$$

Por tanto,

$$L = \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha_0 dt = 2\pi \cos^2 \alpha_0.$$

Ejemplo 7 Se considera la superficie formada por las rectas que se apoyan en la hélice de ecuación $\vec{\alpha}(u) = (\cos u, \sin u, u)$, $u \geq 0$, paralelas al plano $z = 0$ y que se apoyan en el eje OZ . Véase la siguiente gráfica:



Superficie helicoidal

1. Vamos a hallar una parametrización de dicha superficie.

(a) Un punto X de la superficie satisface la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP'} + \lambda \overrightarrow{P'P}$$

donde P' es el punto del eje OZ y P, P' están en la recta que se apoya en la hélice y en el eje OZ y que es paralela al plano $z = 0$. Por tanto si P es el punto de la hélice con coordenadas $(\cos u, \sin u, u)$, las coordenadas de P' son $(0, 0, u)$. se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, \lambda) &= (0, 0, u) + \lambda (\cos u, \sin u, 0) \\ &= (\lambda \cos u, \lambda \sin u, u), \text{ con } u \geq 0 \text{ y } \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

2. Veamos que $\vec{r}(u, \lambda)$ es una parametrización regular. Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, \lambda) &= (-\lambda \sin u, \lambda \cos u, 1), \\ \vec{r}_\lambda(u, \lambda) &= (\cos u, \sin u, 0), \\ \vec{r}_u(u, \lambda) \wedge \vec{r}_\lambda(u, \lambda) &= (-\sin u, \cos u, -\lambda), \\ \|\vec{r}_u(u, \lambda) \wedge \vec{r}_\lambda(u, \lambda)\| &= \sqrt{1 + \lambda^2} \neq 0, \end{aligned}$$

por tanto, la parametrización es regular.

3. Primera forma fundamental. Se tiene:

$$\begin{aligned}
E(u, \lambda) &= \vec{r}_u(u, \lambda) \cdot \vec{r}_u(u, \lambda) = (-\lambda \sin u, \lambda \cos u, 1) \cdot (-\lambda \sin u, \lambda \cos u, 1) \\
&= 1 + \lambda, \\
F(u, \lambda) &= \vec{r}_u(u, \lambda) \cdot \vec{r}_\lambda(u, \lambda) = (-\lambda \sin u, \lambda \cos u, 1) \cdot (\cos u, \sin u, 0) \\
&= 0, \\
G(u, \lambda) &= \vec{r}_\lambda(u, \lambda) \cdot \vec{r}_\lambda(u, \lambda) = (-\lambda \sin u, \lambda \cos u, 1) \cdot (\cos u, \sin u, 0) \\
&= -\lambda.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
I_P: T_P S \times T_P S &\longrightarrow \mathbb{R}, \\
I_P(\vec{w}_1, \vec{w}_2) &= (a_1, b_1) \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

con $\vec{w}_1 = (a_1, b_1)$ y $\vec{w}_2 = (a_2, b_2)$.

Ejemplo 9 Vamos a calcular la curvatura normal de la esfera de radio a y centrada en el origen; esto es, la esfera de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Podemos considerar la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned}
\vec{r}: [0, 2\pi) \times (0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\
\vec{r}(\alpha, \beta) &= (a \cos \alpha \sin \beta, a \sin \alpha \sin \beta, a \cos \beta).
\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) &= (-a \sin \alpha \sin \beta, a \cos \alpha \sin \beta, 0), \\
\vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (a \cos \alpha \cos \beta, a \sin \alpha \cos \beta, -a \sin \beta),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (-a^2 \cos \alpha \sin^2 \beta, -a^2 \sin \alpha \sin^2 \beta, -a^2 \sin \beta \cos \beta), \\
\|\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)\|^2 &= a^4 \cos^2 \alpha \sin^4 \beta + a^4 \sin^2 \alpha \sin^4 \beta + a^4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\
&= a^4 \sin^4 \beta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + a^4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\
&= a^4 \sin^4 \beta + a^4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\
&= a^4 \sin^2 \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = a^4 \sin^2 \beta,
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{N}(\alpha, \beta) = \frac{\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)}{\|\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)\|} = (-\cos \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \sin \beta, -\cos \beta).$$

Y

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) &= (-a \cos \alpha \sin \beta, -a \sin \alpha \sin \beta, 0), \\ \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) &= (-a \sin \alpha \cos \beta, a \cos \alpha \cos \beta, 0), \\ \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) &= (-a \cos \alpha \sin \beta, -a \sin \alpha \sin \beta, -a \cos \beta),\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}E(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) = a^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= a^2 \sin^2 \beta, \\ F(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = 0, \\ G(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = a^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta \\ &= a^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = a \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + a \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = a \sin^2 \beta, \\ M(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = 0, \\ N(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = a \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + a \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + a \cos^2 \beta \\ &= a \sin^2 \beta + a \cos^2 \beta = a.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$k_N((h, k)) = \frac{Lh^2 + 2Mhk + Nk^2}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2} = \frac{a \sin^2 \beta h^2 + ak^2}{a^2 \sin^2 \beta h^2 + a^2 k^2} = \frac{1}{a}.$$

Luego la curvatura normal es constante en cada punto de la superficie y en cada dirección del plano tangente. La indicatriz de Dupin en cada punto de la esfera es:

$$a^2 = x^2 + y^2.$$

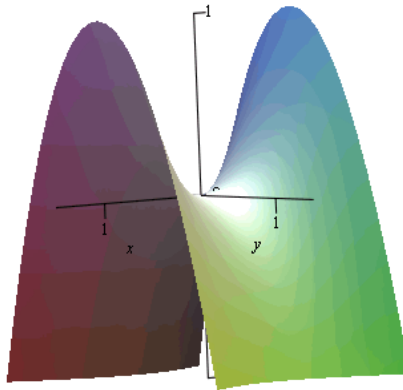
Ejemplo 10 Se considera la superficie con ecuación cartesiana $z = x^2 - y^2$. Se pide:

1. Clasificar los puntos de la superficie.

2. Curvatura normal y curvaturas principales en el punto P de coordenadas $(0, 0, 0)$.
3. Líneas de curvatura en el punto P .
4. Líneas asintóticas en el punto P .

Solución.

La superficie es:



Paraboloide hiperbólico

Una parametrización de dicha superficie es:

$$\vec{r}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2).$$

que es una parametrización de Monge con $f(u, v) = u^2 - v^2$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, v) &= (1, 0, 2u), \\ \vec{r}_v(u, v) &= (0, 1, -2v), \\ \vec{N}(u, v) &= \frac{\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v)}{\|\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v)\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, 2v, 1) \\ \vec{r}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 2), \\ \vec{r}_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ \vec{r}_{vv}(u, v) &= (0, 0, -2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_u(u, v) = 1 + 4u^2, \\
F(u, v) &= \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = -4uv, \\
G(u, v) &= \vec{r}_v(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = 1 + 4v^2, \\
L(u, v) &= \vec{r}_{uu}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \\
M(u, v) &= \vec{r}_{uv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = 0, \\
N(u, v) &= \vec{r}_{vv}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

La matriz de la segunda forma fundamental en un punto arbitrario P de la superficie es:

$$\begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la segunda forma fundamental en un punto arbitrario P de la superficie es:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \end{pmatrix}.$$

El determinante $L(u, v)N(u, v) - M(u, v)^2 < 0$, por tanto, todos los puntos de la superficie son puntos hiperbólicos.

La curvatura normal en el punto $P = \vec{r}(0, 0)$ en la dirección de un vector (h, k) es:

$$k_N(h, k) = \frac{2h^2 - 2k^2}{h^2 + k^2}$$

Si suponemos $(h, k) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ tenemos:

$$k_N(\cos \alpha, \sin \alpha) = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \cos 2\alpha.$$

Por tanto, k_N toma el valor máximo 2 para $\alpha = 0, \pi$, en la dirección de los vectores $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, y k_N toma el valor mínimo -2 para $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$, en la dirección de los vectores $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Para $\alpha \in (-\pi/4, \pi/4) \cup (3\pi/4, 5\pi/4)$, la curvatura normal es positiva.

Para $\alpha \in (\pi/4, 3\pi/4) \cup (5\pi/4, 7\pi/4)$, la curvatura normal es negativa.

Para $\alpha = \pi/4, 3\pi/4$, la curvatura normal es cero. Por tanto, las direcciones asintóticas son:

$$\begin{aligned}
(\cos \pi/4, \sin \pi/4) &= (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \\
(\cos 3\pi/4, \sin 3\pi/4) &= (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura en P es:

$$0 = \begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4u'(t)v'(t)$$

Esto es, $u'(t) = 0$ ó $v'(t) = 0$. Por tanto, las líneas de curvatura son $u(t) = u_0$ ó $v(t) = v_0$, con u_0 y v_0 constantes. Como estamos en el punto $P = \vec{r}(0, 0)$, tenemos $u(0) = 0$ y $v(0) = 0$, por tanto, las líneas de curvatura son:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0, v) &= (0, v, -v^2), \\ \vec{r}(u, 0) &= (u, 0, u^2). \end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas asintóticas en P es:

$$0 = 2(u'(t))^2 - 2(v'(t))^2 \implies 0 = u'(t) + v'(t) \text{ ó } 0 = u'(t) - v'(t)$$

Integrando obtenemos: $u(t) = \pm v(t) + k$. Como $u(0) = v(0) = 0$, se tiene: $u = \pm v$. Las líneas asintóticas son:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, u) &= (u, u, 0) \\ \vec{r}(u, -u) &= (u, -u, 0) \end{aligned}$$