
HOJA DE PROBLEMAS: SUPERFICIES

1 Parametrización de superficies

1. Obtener dos parametrizaciones regulares para cada una de las siguientes **cuádricas** y representar sus respectivas familias de líneas coordenadas:
 - (a) El **paraboloide circular** de ecuación cartesiana: $z = x^2 + y^2$.
 - (b) El **paraboloide elíptico** de ecuación cartesiana: $z = 4x^2 + y^2$.
 - (c) El **paraboloide hiperbólico** de ecuación cartesiana: $z = x^2 - y^2$.
2. Obtener una parametrización regular para cada una de las siguientes **cuádricas** y representar sus respectivas familias de líneas coordenadas:
 - (a) **Esfera** de radio 1 y centro el origen de coordenadas.
 - (b) **Esfera** de radio 3 y centro el punto $(2, 1, 0)$.
 - (c) **Elipsoide** de ecuación cartesiana: $2x^2 + (y - 2)^2 + \frac{z^2}{4} = 1$.
 - (d) **Hiperboloide hiperbólico** (o **de una hoja**) de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
 - (e) **Hiperboloide elíptico** (o **de dos hojas**) de ecuación $x^2 + y^2 = z^2 - 1$.
 - (f) La hoja del **cilindro hiperbólico** de ecuación cartesiana: $x^2 - y^2 = 1$, con $x > 0$.
 - (g) **Cono** de ecuación cartesiana: $z^2 = x^2 + y^2$.
3. Señalar las cuádricas de los ejercicios 1 y 2 que son superficies de revolución y superficies regladas.
4. Obtener una parametrización regular para cada una de las siguientes superficies de revolución y representar sus respectivas familias de líneas coordenadas:
 - (a) El **toro** es la superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior a la circunferencia (esto es, que no la corta) y coplanaria.
 - (b) Parametrizar la **catenoide** obtenida al girar la catenaria con parametrización $\gamma(u) = (2 \cosh u, 0, 2u)$ alrededor del eje OZ . Representar sus líneas coordenadas en un punto regular y hallar el ángulo que forman, utilizando la primera forma fundamental.

5. Obtener una parametrización regular para cada una de las siguientes superficies de regladas y representar sus respectivas familias de líneas coordenadas:

- (a) **Superficie cónica** con base la circunferencia de ecuaciones cartesianas $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y vértice el punto $(0, 1, 1)$.
- (b) Superficie **helicoidal** formada por rectas que se apoyan en una hélice y en el eje de la misma y que son ortogonales al eje.
- (c) La superficie formada por rectas que se apoyan en la elipse de ecuaciones cartesianas: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$, y son paralelas a la recta de ecuaciones: $x - y + z = 1$, $x - 2z = 0$.

6. Obtener y representar las respectivas familias de líneas coordenadas de las siguientes superficies

- (a) **Banda de Moëbius** (Möbius y Listing, 1858) con parametrización:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \left(\left(2 - v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) \sin(u), \left(2 - v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) \cos(u), v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right), \\ u &\in [0, 2\pi), v \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

- (b) **Botella de Klein** (Felix Klein, 1882) (con MAPLE) con parametrización:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \left(a(u, v) \cos(u), a(u, v) \sin(u), \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(v) + \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(2v) \right), \\ a(u, v) &= 2 + \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(v) - \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(2v) \\ u &\in [0, 2\pi), v \in [0, 4\pi) \end{aligned}$$

7. Obtener una parametrización regular de la superficie reglada formada por las rectas tangentes a la curva con parametrización:

$$r(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \quad u \in [0, 4\pi],$$

y hallar la curva intersección de dicha superficie con el plano $z = 0$.

8. Obtener una parametrización regular de la superficie **tubular** formada por circunferencias situadas en el plano normal a la curva con parametrización

$$r(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \quad u \in [0, 4\pi],$$

y con centro el correspondiente punto de la curva. Representar las familias de líneas coordenadas de dicha superficie.

2 Estudio local de superficies

1. Demostrar que la primera forma fundamental de una superficie S en un punto P depende de la parametrización de la superficie elegida. (Pista: Dar dos parametrizaciones distintas de una superficie.)
2. Se considera la **esfera** de radio R y centro el origen de coordenadas. Se pide:
 - (a) Dar una parametrización de la esfera.
 - (b) Calcular la longitud de la curva imagen de la curva parámetro $u = k_1$ (constante) sobre la esfera.
 - (c) Calcular la longitud de la curva imagen de la curva parámetro $v = k_2$ (constante) sobre la esfera.

3. Se considera la superficie con parametrización: $r(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u)$. Se pide:
 - (a) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
 - (b) Hallar las curvas coordenadas en el punto P . ¿Qué ángulo forman?
 - (c) Hallar el ángulo formado por las curvas imagen de $v = \frac{\pi}{4} + u$ y $v = \frac{\pi}{4} - u$.
 - (d) Indicar la integral doble que representa el área de la superficie imagen mediante la parametrización dada de $[-1, 0] \times [0, \pi]$.

4. Estudiar si hay puntos en la superficie con parametrización:

$$r(u, v) = (u \cos v + \sin v, \cos v - u \sin v, u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in (-\pi, \pi),$$

en los que las curvas coordenadas se corten ortogonalmente.

5. Calcular la matriz de la primera forma fundamental y el área de las siguientes superficies:
 - (a) $r(u, v) = (2 \cos v, 2 \sin v, u)$, $(u, v) \in [0, 3] \times [0, 2\pi]$.
 - (b) $z = xy$, con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - (c) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
 - (d) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u + 1)$, $2 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq \pi$.
6. Dada la superficie con parametrización $r(u, v) = (u^2 + v^2, u^3, v^3)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, se pide:

- (a) La ecuación del plano tangente a la superficie, paralelo al plano $3x - 2y - 2z = 0$.
- (b) El vector unitario normal a dicha superficie en el punto $P = (2, 1, -1)$.
- (c) Las curvas coordenadas en el punto P y el ángulo que forman dichas curvas.

7. Consideramos la superficie generada al girar alrededor del eje OZ la curva $z = \log x$ contenida en el plano $y = 0$.
- Obtener una parametrización de la superficie.
 - Determinar el vector normal y el plano tangente en el punto $P = (1, 0, 0)$.
 - Hallar las curvas paramétricas en el punto P . ¿Son ortogonales?
 - Se considera la curva contenida en la superficie dada por $\gamma(t) = r(t+1, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ que pasa por P . ¿Qué ángulo forma γ con las curvas paramétricas en P ?
8. Sea S la superficie con parametrización $r(u, v) = (u, u+v, u^3-v^2)$ y sea $\gamma(t) = (0, t, -t^2)$ contenida en S . Hallar el ángulo que forma la curva γ con las curvas coordenadas en el punto $P = (0, 1, -1)$.
9. Calcular la primera y segunda forma fundamental y clasificar los puntos de las siguientes superficies:
- Esfera:** $r(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$,
con $(u, v) \in (-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi)$.
 - Helicoide:** $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4v)$, $u > 0, v > 0$.
 - Toro:** $r(u, v) = ((3 + 2 \cos u) \cos v, (3 + 2 \cos u) \sin v, 2 \sin u)$,
con $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.
 - Paraboloide hiperbólico:** $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$.
 - Banda de Moebius:** $r(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin u, \left(2 - v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos u, v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)$,
con $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [-1, 1]$.
10. Hallar las curvas asintóticas del **paraboloide hiperbólico** $z = x^2 - y^2$.
11. Determinense los puntos umbílicos del **elipsoide** $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.
12. Determinense las direcciones principales de la superficie engendrada por la curva $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$ al trasladarse a lo largo del eje OX .
13. Se considera el punto P de coordenadas $(\frac{2}{3}, 0, 1)$ de la **superficie mínima de Enneper** con parametrización:

$$r(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Se pide:

- Hallar las curvaturas principales y direcciones principales en el punto P .
- Direcciones asintóticas (si las hay) en el punto P .
- Clasificar el punto P .
- Si la curvatura media de una superficie en uno de sus puntos es nula, ¿puede afirmarse que las direcciones asintóticas en dicho punto son perpendiculares? Razonar la respuesta.

14. Se considera la superficie obtenida al girar de la curva $\gamma(u) = (\cosh u, 0, \sinh u)$ alrededor del eje OZ . Se pide:

- (a) Comprobar que la curva está contenida en el **cilindro hiperbólico** de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ y en el plano de ecuación $y = 0$.
- (b) Clasificar los puntos de la superficie precisando, en su caso, las líneas de puntos parabólicos.
- (c) Obtener las líneas de curvatura principal. ¿Qué tipo de curvas son?
- (d) ¿Existen direcciones asintóticas en algún punto de la superficie? Si las hay, obtener las ecuaciones paramétricas de las líneas asintóticas de la superficie.

15. Se considera la superficie S con representación paramétrica

$$r(u, v) = (uv, ue^v, 1 + u^2 + v^2), \quad u \in [1, 2], \quad v \in [0, 2\pi).$$

Se pide:

- (a) Hallar el ángulo que forman las dos curvas coordenadas que contienen al punto $P = (0, 1, 2)$.
- (b) Direcciones asintóticas en el punto P .
- (c) Curvaturas principales en el punto P .

16. Se considera la superficie con parametrización:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u + 1).$$

Se pide:

- (a) Líneas coordenadas y ángulo que forman en un punto genérico de la superficie.
- (b) Determinar las curvaturas principales y clasificar los puntos regulares de la superficie.
- (c) Direcciones principales y asintóticas (como vectores de $\mathbb{R}^3$) en el punto $(1, 0, 2)$.

17. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $C = \{x = 1 + z^2, y = 0\}$ alrededor del eje OZ . Se pide:

- (a) Dar una parametrización de la superficie S .
- (b) Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto $P = (1, 0, 0)$.
- (c) Clasificar el punto P .
- (d) Calcular las curvaturas y direcciones principales en P , expresando estas últimas como vectores de $\mathbb{R}^3$.
- (e) Calcular la curvatura de Gauss y curvatura media en P .
- (f) Obtener las direcciones asintóticas en P , expresadas como vectores de $\mathbb{R}^3$.
- (g) Calcular la curvatura en la dirección que forma un ángulo $\pi/4$ con la dirección de curvatura mínima.

18. Se considera la superficie $\mathcal{S}$ con representación paramétrica

$$r(u, v) = (u^2 + uv + u, u, (v + 1)^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

y el punto $P = (1, 1, 0)$. Se pide:

- (a) Calcular todos los puntos singulares de $\mathcal{S}$.
- (b) Determinar la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en P .
- (c) Determinar una parametrización de la recta normal a $\mathcal{S}$ en P .
- (d) Calcular la matriz de la primera forma fundamental.
- (e) Determinar una parametrización de las curvas coordenadas de $\mathcal{S}$ que contienen a P .
¿Qué ángulo forman estas líneas coordenadas?
- (f) Se considera la curva contenida en la superficie dada por $\gamma(t) = r(2t - 1, t - 2)$ con $t \in \mathbb{R}$ que pasa por P . Calcular el ángulo forma γ con la curva paramétrica $u = 1$.
- (g) Calcular la matriz de la segunda forma fundamental de $\mathcal{S}$ en P .
- (h) Hallar las direcciones principales expresadas como vectores de $\mathbb{R}^3$ y las curvaturas principales de $\mathcal{S}$ en P .
- (i) Calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media en P . Clasificar el punto P .
- (j) Hallar las direcciones asintóticas de $\mathcal{S}$ en P , expresadas como vectores de $\mathbb{R}^3$.