

1. Dada la función

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^6}{x^4 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Estudiar la existencia de derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^2$.
- (b) Calcular el gradiente de f en $(0, 0)$ y estudiar la diferenciabilidad de f en dicho punto.
- (c) Calcular el gradiente y la derivada direccional máxima en el punto $(-1, 1)$.
- (d) Hacer un pequeño croquis que contenga la curva de nivel 0 y el gradiente de f en $(-1, 1)$.

Solución.

- (a) Las derivadas parciales en un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ son:

$$f_x(x, y) = \frac{5x^4(x^4 + y^4) + 4x^3(x^5 + y^6)}{(x^4 + y^4)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{5y^5(x^4 + y^4) + 4y^3(x^5 + y^6)}{(x^4 + y^4)^2},$$

y las derivadas parciales en el $(0, 0)$ son:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (h, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (0, h)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^6}{h^4}}{h} = 0.$$

- (b) El gradiente de f en el $(0, 0)$ es:

$$\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) = (1, 0).$$

Tenemos:

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{h^5 + k^6}{h^4 + k^4} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{k^6 - hk^4}{(h^4 + k^4)\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Por polares: $h = r \cos(\theta)$, $k = r \sin(\theta)$:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \sin^6(\theta) - r^5 \cos(\theta) \sin^4(\theta)}{r^5 (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \sin^6(\theta) - \cos(\theta) \sin^4(\theta)}{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)} \\ &= \frac{-\cos(\theta) \sin^4(\theta)}{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)} \end{aligned}$$

Luego f no es diferenciable en el $(0, 0)$ pues el límite anterior no es cero para todo valor de θ .

(c) El gradiente de f en el $(-1, 1)$ es:

$$\nabla f(-1, 1) = (f_x(-1, 1), f_y(-1, 1)) = \left(\frac{5}{2}, 3 \right).$$

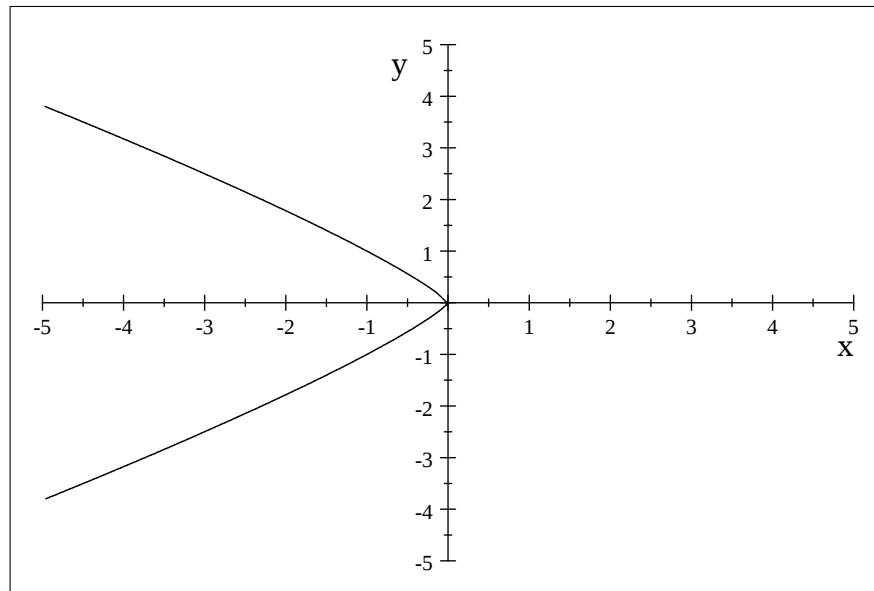
Y la derivada direccional máxima en el $(-1, 1)$ es:

$$\|\nabla f(-1, 1)\| = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}}.$$

(d) Curva de nivel 0 de f :

$$\begin{aligned} C_0 &= \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\} \\ &= \left\{ (x, y) \text{ tales que } \frac{x^5 + y^6}{x^4 + y^4} = 0 \right\} \\ &= \{(x, y) \text{ tales que } x^5 + y^6 = 0\} \end{aligned}$$

que es la siguiente curva:



2. Dada la función

$$f(x, y) = 3\sqrt[3]{xy^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- (a) Determinar si tiene plano tangente en $(x, y) = (0, 0)$, y en caso afirmativo, hallarlo
- (b) Hallar:
- La curva de nivel en el punto $(2, 2)$.
 - El gradiente de f en el punto $(2, 2)$
 - La derivada de f en el punto $(2, 2)$ y en la dirección del vector $(-1, \sqrt{3})$
 - El plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 2, f(2, 2))$.
 - La recta intersección del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 2, f(2, 2))$ y el plano $z = f(2, 2)$.
- Hacer un croquis muy esquemático de los resultados obtenidos.

Solución.

- (a) Calculamos las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$. Las derivadas parciales son:

$$f_x(x, y) = 3\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}},$$

$$f_y(x, y) = 3x^{1/3}\frac{2}{3}y^{-1/3} = 2\sqrt[3]{\frac{x}{y}},$$

por tanto sólo están definidas si $(x, y) \neq (0, 0)$. En el $(0, 0)$ tenemos:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (h, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (0, h)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Luego existen y el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 0)$ es:

$$z = f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) \iff z = 0.$$

- (b) Tenemos $f(2, 2) = 3\sqrt[3]{2 \cdot 4} = 6$. La curva de nivel 6 es:

$$\begin{aligned} C_6 &= \{(x, y) \mid f(x, y) = 6\} \\ &= \{(x, y) \text{ tales que } 3\sqrt[3]{xy^2} = 6\} \\ &= \{(x, y) \text{ tales que } xy^2 = 8\}. \end{aligned}$$

Gradiente de f en el punto $(2, 2)$:

$$\nabla f(2, 2) = (f_x(2, 2), f_y(2, 2)) = (1, 2).$$

Derivada de f en el punto $(2, 2)$ en la dirección del vector $(-1, \sqrt{3})$.
Como f es diferenciable en el punto $(2, 2)$ tenemos:

$$D_{\vec{u}}f(2, 2) = \nabla f(2, 2) \cdot \vec{u} = (1, 2) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \right) = \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}.$$

El plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 2, f(2, 2))$ es:

$$\begin{aligned} z &= f(2, 2) + f_x(2, 2)(x - 2) + f_y(2, 2)(y - 2) \\ z &= 6 + (x - 2) + 2(y - 2) \iff z = x + 2y. \end{aligned}$$

3. Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (a) Hay funciones diferenciables $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto (a, b) que no son continuas en el punto (a, b) .

Falso, toda función diferenciable en un punto es continua. en ese punto.

- (b) Toda función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga todas las derivadas parciales en un punto (a, b) es diferenciable en (a, b) .

Falso, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es diferenciable en el punto $(0, 0)$ y tiene derivadas parciales en el punto $(0, 0)$.

- (c) El gradiente de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 2)$ es perpendicular a la curva de nivel $x^2 + y^2 = 6$ de f .

Falso, pues $\nabla f(1, 2)$ se apoya en el punto $(1, 2)$ y el punto $(1, 2)$ no pertenece a la curva de nivel 6.

- (d) El gradiente de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 2)$ es perpendicular a la curva de nivel $x^2 + y^2 = 5$ de f .

Sólo es cierto si consideramos el punto $(1, 2)$ de la curva de nivel 5, pues $\nabla f(1, 2) = (2, 4)$ y la recta tangente a la curva de nivel 5 en el punto $(1, 2)$ tiene vector director $\vec{v} = (-2, 1)$ y $\nabla f(1, 2) \cdot (-2, 1) = 0$.

- (e) Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones dos veces derivables tales que $f'(1) = g'(3) = 0$ y $f''(1) > 0$ y $g''(3) > 0$ entonces la función $F(x, y) = f(x) + g(y)$ tiene un extremo relativo en el punto $(1, 3)$.

Verdadero. Veamos primero que el punto $(1, 3)$ es un punto crítico de f :

$$F_x(x, y) = f'(x), \quad F_y(x, y) = g'(y)$$

luego,

$$F_x(1, 3) = f'(1) = 0, \quad F_y(1, 3) = g'(3) = 0.$$

Y la matriz hessiana de F en el punto $(1, 3)$ es:

$$HF(1, 3) = \begin{pmatrix} F_{xx}(1, 3) & F_{xy}(1, 3) \\ F_{xy}(1, 3) & F_{yy}(1, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''(1) & 0 \\ 0 & g''(3) \end{pmatrix}.$$

Luego $\det HF(1, 3) = f''(1) \cdot g''(3) > 0$ y $f''(1) > 0$ luego F tiene un mínimo relativo en el punto $(1, 3)$.

- (f) Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) = 1$. Entonces la función $F(x, y) = f(x)f(y)$ tiene un punto de silla en el punto (a, a) .

Verdadero. Veamos primero que el punto (a, a) es un punto crítico de f :

$$F_x(x, y) = f'(x)f(y), \quad F_y(x, y) = f(x)f'(y)$$

luego,

$$F_x(a, a) = F_y(a, a) = 0.$$

Y la matriz hessiana de F en el punto (a, a) es:

$$\begin{aligned} HF(a, a) &= \begin{pmatrix} F_{xx}(a, a) & F_{xy}(a, a) \\ F_{xy}(a, a) & F_{yy}(a, a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''(a)f(a) & f'(a)f'(a) \\ f'(a)f'(a) & f(a)f''(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego $\det HF(a, a) < 0$ luego F tiene un punto de silla en el punto (a, a) .