

MATEMATICAS con MAPLE

Práctica IV de Cálculo diferencial

Cálculo de puntos críticos de una función

- Los puntos críticos de $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.$$

- Los puntos críticos de $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$f_x(x, y, z) = 0, \quad f_y(x, y, z) = 0, \quad f_z(x, y, z) = 0.$$

Criterio de clasificación de los puntos críticos de una función

- Se considera la matriz hessiana de una función $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punto crítico (a, b) :

$$Hess(f)(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

1. Si $\det(Hess(f)(a, b)) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, el punto (a, b) es un mínimo local de f .
2. Si $\det(Hess(f)(a, b)) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, el punto (a, b) es un máximo local de f .
3. Si $\det(Hess(f)(a, b)) < 0$, el punto (a, b) es un punto de silla de f .

- Se considera la matriz hessiana de una función $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punto crítico (a, b, c) :

$$Hess(f)(a, b, c) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b, c) & f_{xy}(a, b, c) & f_{xz}(a, b, c) \\ f_{xy}(a, b, c) & f_{yy}(a, b, c) & f_{yz}(a, b, c) \\ f_{xz}(a, b, c) & f_{yz}(a, b, c) & f_{zz}(a, b, c) \end{pmatrix}$$

Se consideran los menores principales de $Hess(f)(a, b, c)$:

$$\begin{aligned} D_1 &= f_{xx}(a, b, c), \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b, c) & f_{xy}(a, b, c) \\ f_{xy}(a, b, c) & f_{yy}(a, b, c) \end{pmatrix}, \\ D_3 &= \det(Hess(f)(a, b, c)) \end{aligned}$$

1. Si $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 > 0$, el punto (a, b, c) es un mínimo local de f .
2. Si $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 < 0$, el punto (a, b, c) es un máximo local de f .
3. Si $D_3 \neq 0$ y no se cumplen ninguna de las dos situaciones anteriores, el punto (a, b, c) es un punto de silla de f .
4. Si $D_3 = 0$, el criterio no decide.

Ejercicios

1. Hallar los extremos locales de la función $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2 - 2xy$.
2. Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + 3y^2$$

- (a) Calcular y clasificar sus extremos relativos.
- (b) Calcular sus extremos absolutos en el conjunto

$$A = \{(x, y) \mid 4x^2 + 3y^2 \leq 9\}$$

3. **ENTREGA.** El recinto $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ está cubierto por una bóveda cuya altura en cada punto es

$$z(x, y) = \frac{1}{48} (80 - 4x^4 - y^4 + 8x^2 - 8y^2)$$

y cerrado por un muro perimetral vertical. Calcular las alturas máxima y mínima de la bóveda y del muro.