

1 Sistemas de ecuaciones lineales.

1.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Sea $\mathcal{S}$ el siguiente sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, se denominan los *coeficientes* del sistema, $b_j \in \mathbb{R}$ $1 \leq j \leq m$, se denominan los *términos independientes* del sistema y $(x_1, \dots, x_n)$ son las *incógnitas* del sistema. El sistema (1) se puede escribir de manera matricial como sigue: $A\vec{x} = \vec{b}$, donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}, \text{ es la } \textit{matriz de coeficientes} \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ es el } \textit{vector de incógnitas} \\ \text{y } \vec{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ es el } \textit{vector de términos independientes} \end{aligned}$$

La matriz

$$\tilde{A} = (A | \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}$$

se denomina *matriz ampliada* del sistema. Obsérvese que $\tilde{A}$ recoge toda la información del sistema.

Si $\vec{b} = \vec{0}$ se dice que el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ es *homogéneo*.

Si $\vec{b} \neq \vec{0}$ se dice que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es *no homogéneo*.

Dado un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ no homogéneo, al sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ (que tiene la misma matriz de coeficientes) se denomina *sistema homogéneo asociado*.

Se dice que el sistema es:

1. *Incompatible* si no tiene solución
2. *Compatible* si tiene solución

- (a) *Compatible determinado* si tiene una única solución
- (b) *Compatible indeterminado* si tiene más de una solución

1.2 Existencia de soluciones

Teorema de Rouché-Frobenius Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, $A\vec{x} = \vec{b}$ ($A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ matriz de coeficientes y $\tilde{A} = (A | \vec{b}) \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}$ matriz ampliada), se verifica:

1. El sistema es incompatible si y sólo si $rgA \neq rg\tilde{A}$.
2. El sistema es compatible si y sólo si $rgA = rg\tilde{A}$.
 - (a) Si $rgA = rg\tilde{A} = n$, entonces el sistema es compatible determinado.
 - (b) Si $rgA = rg\tilde{A} < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

Demostración.

El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si existen $x_1, \dots, x_n$ números reales tales que

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

esto es,

$$\vec{a}_{*1}x_1 + \dots + \vec{a}_{*n}x_n = \vec{b}$$

donde $\vec{a}_{*j}$ es la columna j -ésima de la matriz A . Por tanto, el sistema tiene solución si y sólo si $\vec{b}$ es combinación lineal de los vectores columna de A ; esto es,

$$\begin{aligned} \vec{b} &\in \mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\}) \iff \mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}, \vec{b}\}) = \mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\}) \\ &\iff rg\tilde{A} = \dim \mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}, \vec{b}\}) = \dim \mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\}) = rgA \end{aligned}$$

- Si $rg\tilde{A} = rgA = n$, entonces $\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\}$ es un sistema linealmente independiente que generan $\mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\})$ y, por tanto, es una base de $\mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\})$. Luego como las coordenadas son únicas, existen únicos números $(x_1, \dots, x_n)$ tales que $\vec{a}_{*1}x_1 + \dots + \vec{a}_{*n}x_n = \vec{b}$. Por tanto, el sistema es compatible determinado.
- Si $rg\tilde{A} = rgA < n$, entonces $\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\}$ no es linealmente independiente y, por tanto, no es una base de $\mathcal{L}(\{\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}\})$. Luego, la forma de escribir $\vec{b}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}_{*1}, \dots, \vec{a}_{*n}$ no es única y, por tanto, la solución del sistema no es única.

Observaciones

1. Un sistema homogéneo siempre es compatible pues $\vec{x} = \vec{0}$ siempre es solución del sistema.
2. Si el sistema homogéneo es compatible determinado entonces $\vec{x} = \vec{0}$ es la única solución del sistema.

1.3 Propiedades de las soluciones de un sistema lineal

1.3.1 Sistemas homogéneos

El conjunto W de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales y n incógnitas, $A\vec{x} = \vec{0}$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $\dim W = n - \text{rg}(A)$. Nótese que

$$W = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

1.4 Sistemas equivalentes

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, a continuación vamos a ver dos métodos para encontrar un sistema equivalente al dado.

1. Este primer método es útil para sistemas compatibles; esto es, sistemas que verifican: $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = r$:
 - (a) Buscamos un menor básico o principal de A ; esto es, un menor M_r de orden r de A tal que $M_r \neq 0$.
 - (b) Del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ suprimimos las ecuaciones que no corresponden a las filas del menor elegido.
 - (c) Pasamos al lado del término independiente las incógnitas que no corresponden a las columnas del menor elegido.

El sistema que obtenemos es equivalente al de partida.

Ejemplo. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + 5z = 3 \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 2 ya que $\det A = 0$ y, por ejemplo, el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas de la matriz es distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Tomamos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ como menor básico. La matriz ampliada es

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 2 pues orlando el menor básico de A tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, $rg A = rg \tilde{A} = 2 < 3$, y el sistema es compatible indeterminado. Como el menor principal que hemos considerado es el formado por las dos primeras filas podemos prescindir de la tercera ecuación del sistema. Un sistema equivalente al lado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 2 - 3\alpha \end{array} \right\}$$

donde $z = \alpha \in \mathbb{R}$.

2. Cuando en un sistema de ecuaciones lineales se realizan las siguientes operaciones el sistema que se obtiene es equivalente al de partida:

Intercambiar ecuaciones

Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero

Sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes

1.5 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1.5.1 Método de Cramer

El método de Cramer se utiliza para sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados; esto es, sistemas de ecuaciones lineales de la forma: $A\vec{x} = \vec{b}$, con $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, donde $rg(A) = rg(\tilde{A}) = n$. Como $rg(A) = n$ la matriz A es invertible. Multiplicando por la inversa de A el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ obtenemos:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \text{ solución del sistema}$$

Como sabemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj} A)^t$$

se tiene que la solución del sistema es

$$\vec{x} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj} A)^t \vec{b}.$$

Desarrollando lo anterior se tiene:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$$

donde A_i es la matriz obtenida al susituir en la matriz A la columna i -ésima por la columna de términos independientes.

1.5.2 Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan consiste en obtener un sistema equivalente al dado y más fácil de resolver. Si partimos de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$; esto es,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

utilizando operaciones permitidas obtendremos un sistema equivalente de la forma

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \dots + \hat{a}_{1n}x_n &= \hat{b}_1 \\ \hat{a}_{22}x_2 + \dots + \hat{a}_{2n}x_n &= \hat{b}_2 \\ &\vdots \\ \hat{a}_{rn}x_n &= \hat{b}_r \\ 0 &= 0 \\ &\vdots \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si $\hat{a}_{rn} = 0$ y $\hat{b}_r \neq 0$ el sistema de partida es incompatible.

Si $\hat{a}_{nn} \neq 0$ y $\hat{b}_n \neq 0$ ($r = n$) el sistema de partida es compatible determinado.

Si $\hat{a}_{rn} \neq 0$ y $\hat{b}_r \neq 0$ ($r < n$) el sistema de partida es compatible indeterminado.

Observaciones.

1. Nótese que utilizando este método no es necesario estudiar primero la compatibilidad del sistema con el Teorema de Rouché-Frobenius.
2. Como la matriz ampliada recoge toda la información del sistema de ecuaciones, las operaciones elementales las haremos en la matriz ampliada.
3. Utilizaremos el símbolo $\sim$ cuando pasemos de una matriz ampliada de un sistema S a la matriz ampliada de un sistema equivalente a S .

Las operaciones elementales son:

1. Intercambiar ecuaciones del sistema que equivale a intercambiar filas de la matriz ampliada.
2. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero que equivale a multiplicar una fila de la matriz ampliada por un número distinto de cero.
3. Sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes que equivale a sumar a una fila de la matriz ampliada una combinación lineal de las restantes filas.

Ejemplo. Vamos a estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y - 2z = 2 \\ -x + 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

1. Utilizamos el método de Gauss. La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2^a \text{ fila} + 3(1^a \text{ fila}) \\ 3^a \text{ fila} + 1^a \text{ fila}}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{3^a \text{ fila} - 2^a \text{ fila}}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por tanto el sistema equivalente se escribe:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 7y - 5z = 5 \\ 0 = -6 \end{cases}$$

que es incompatible pues $0 \neq -6$.