

1 Autovalores y autovectores asociados a un endomorfismo f . Diagonalización.

Dado un endomorfismo f de un espacio vectorial real V y fijada una base B de V obtenemos una única matriz asociada a f respecto de la base B que denotamos $M_{BB}(f)$ ó $M_B(f)$. Se verifica que todas matrices asociadas a un mismo endomorfismo f de V respecto de distintas bases son semejantes; esto es, si B y B' son bases de V , se tiene que:

$$\begin{aligned} M_{BB}(f) &= M_{B'B} \cdot M_{B'B'}(f) \cdot M_{BB'} \\ &= M_{B'B} \cdot M_{B'B'}(f) \cdot M_{B'B}^{-1}. \end{aligned}$$

El objetivo de este tema es obtener (cuando sea posible) una base $\tilde{B}$ del espacio vectorial V tal que la matriz $M_{\tilde{B}\tilde{B}}(f)$ sea diagonal.

1.1 Matrices semejantes

Definición. Se dice que dos matrices cuadradas de orden n , A y $B \in \mathcal{M}_n$, son *semejantes* si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n$ regular tal que $A = PBP^{-1}$. Dicha matriz P se denomina *matriz de paso*.

Propiedades.

1. Si dos matrices A, B son semejantes entonces $\det A = \det B$.
2. Si dos matrices son semejantes entonces sus rangos coinciden.
3. Si A y B son semejantes entonces A^k y B^k también son semejantes.
4. Las matrices asociadas a un mismo endomorfismo $f: V \longrightarrow V$ respecto de distintas bases son semejantes.

1.2 Autovalores de un endomorfismo f

Definición. Dada un endomorfismo f de V , diremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *autovalor* ó *valor propio* de f si existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Al vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que cumple lo anterior lo llamaremos *autovector* o *vector propio* de f asociado al autovalor λ .

Llamamos *subespacio propio asociado al autovalor λ* al siguiente conjunto:

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}.$$

Proposición. $V(\lambda)$ es un subespacio vectorial de V invariante por f .

Demostración. Veamos primero que es un subespacio vectorial de V . V_λ no es el conjunto vacío pues $\vec{0} \in V_\lambda$. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in V_\lambda$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = f(\alpha\vec{v}) + f(\beta\vec{w}) = \lambda\alpha\vec{v} + \lambda\beta\vec{w} = \lambda(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}),$$

y por tanto, $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in V_\lambda$. Luego, V_λ es un subespacio vectorial de V .

Veamos que es invariante por f ; esto es, si $\vec{v} \in V_\lambda$ tenemos que ver que $f(\vec{v}) \in V_\lambda$:

$$f(f(\vec{v})) = f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \implies f(\vec{v}) \in V_\lambda.$$

Proposición. Sea endomorfismo f de V , B_C la base canónica de V y $A = M_{B_C B_C}(f)$ la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) λ es un autovalor de f
- (ii) El sistema homogéneo $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado
- (iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Demostración.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es un autovalor de } f &\iff \text{ existe } \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}, \text{ tal que } f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \\ &\iff \text{ existe } \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}, \text{ tal que } A(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \\ &\iff \text{ existe } \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}, \text{ tal que } (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}, \\ &\quad \text{donde } I \text{ es la matriz identidad de orden } n \\ &\iff \text{ el sistema homogéneo } (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \\ &\quad \text{es compatible indeterminado} \\ &\iff \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

1.3 Autovalores de una matriz cuadrada A

Definición. Los *autovalores* de una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ son los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{C}$) que anulan el siguiente polinomio de grado n :

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

que llamaremos *polinomio característico*.

A la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ la llamaremos *ecuación característica*. Las raíces de la ecuación característica son, por tanto, los autovalores de la matriz A . Denotando por α_i la multiplicidad de la raíz λ_i de la ecuación característica, entonces la factorización del polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{\alpha_r}, \text{ donde } \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n.$$

Propiedad. Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Demostración: Sean A, B dos matrices semejantes; esto es, existe una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |PBP^{-1} - \lambda I| = |PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}| = |P(B - \lambda I)P^{-1}| \\ &= |P||B - \lambda I||P^{-1}| = |P||B - \lambda I||P|^{-1} = |B - \lambda I|. \end{aligned}$$

Propiedad. Todas las matrices asociadas a una misma aplicación lineal f , $A = M_{BB}(f)$, tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos autovalores que son precisamente los autovalores de la aplicación lineal f .

Demostración: Si $A = M_{BB}(f)$ y $A' = M_{B'B'}(f)$ son dos matrices asociadas a f respecto de distintas bases, entonces son matrices semejantes pues la matriz $M_{B'B}$ verifica:

$$M_{BB}(f) = M_{B'B} \cdot M_{B'B'}(f) \cdot M_{B'B}^{-1}.$$

Y como las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, se concluye.

Si $A = M_{BB}(f)$ para cada autovalor λ_i de A , tenemos el *subespacio de los autovectores asociados al autovalor λ_i* :

$$\begin{aligned} V_{\lambda_i} &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \lambda_i \vec{v}\} \\ &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}\} \end{aligned}$$

Llamaremos *multiplicidad geométrica* de λ_i a la dimensión de V_{λ_i} y la denotaremos por $m_i = \dim(V_{\lambda_i})$.

Obsérvese que

$$\dim(V_{\lambda_i}) = n - \text{rg}(A - \lambda_i I)$$

y por ser λ_i un autovalor de A , se tiene que $\det(A - \lambda_i I) = 0$ y, por tanto, $\text{rg}(A - \lambda_i I) < n$. Luego $\dim(V_{\lambda_i}) \neq 0$.

1.4 Propiedades de los autovectores

1. Se verifica que

$$\dim(V_{\lambda_i}) \leq \alpha_i$$

donde α_i es la multiplicidad de la raíz λ_i . Luego

$$1 \leq \dim(V_{\lambda_i}) \leq \alpha_i.$$

2. Autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

1.5 Propiedades de los autovalores

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada con polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

donde los autovalores λ_i se pueden repetir. Entonces

1. La matriz A y su traspuesta A' tienen los mismos autovalores.
2. $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ y $\text{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

3. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, los autovalores de la matriz αA son $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$.
4. Dado $k \in \mathbb{N}$, los autovalores de la matriz A^k son $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$.
5. Si A es una matriz no singular entonces todos sus autovalores son no nulos y los autovalores de la matriz A^{-1} son: $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$.
6. Si A es una matriz idempotente entonces sus autovalores son 0 ó 1.
7. Si A es una matriz triangular entonces sus autovalores son los elementos de la diagonal principal.
8. Si A es una matriz ortogonal con autovalores reales entonces sus autovalores son -1 ó 1 .

1.6 Diagonalización de un endomorfismo f

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$.

Proposición. Sean $\lambda \neq \mu$ dos autovalores de un endomorfismo f se tiene:

$$V_\lambda \cap V_\mu = \{\vec{0}\}.$$

Demostración. Sea $\vec{v} \in V_\lambda \cap V_\mu$ entonces $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ y $f(\vec{v}) = \mu\vec{v}$ luego, restando obtenemos $\vec{0} = \lambda\vec{v} - \mu\vec{v} = (\lambda - \mu)\vec{v}$ de donde como $\lambda \neq \mu$, obtenemos $\vec{v} = \vec{0}$.

Proposición. Autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

Demostración. Sean $\vec{v} \in V_\lambda$ y $\vec{w} \in V_\mu$ veamos que son linealmente independientes. Supongamos una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$\vec{0} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$$

entonces $\alpha\vec{v} = -\beta\vec{w}$ y, por tanto, $\alpha\vec{v} \in V_\lambda \cap V_\mu = \{\vec{0}\}$ luego $\alpha = 0$. Análogamente obtendríamos $\beta = 0$.

Proposición. Sea A la matriz asociada a f , entonces

$$\dim(V_\lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I).$$

Demostración. El subespacio propio asociado al autovalor λ de A se escribe:

$$V_\lambda = \{\vec{x} \mid (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\}$$

y, por tanto, es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Se verifica:

$$\dim(V_\lambda) = \dim V - \text{rg}(A - \lambda I).$$

Obsérvese que por ser λ un autovalor de $A \in \mathcal{M}_n$, se tiene que $\text{rg}(A - \lambda I) < n$. Luego el sistema $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ tiene solución distinta de la trivial y $\dim V_\lambda \neq 0$.

Proposición. Sea $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ un autovalor de multiplicidad α del endomorfismo f , entonces

$$1 \leq \dim(V_{\lambda_0}) \leq \alpha.$$

Demostración. Como $\text{rg}(A - \lambda_0 I) < n$ se tiene:

$$\dim(V_{\lambda_0}) = \dim V - \text{rg}(A - \lambda_0 I) \geq 1.$$

Sea $d = \dim(V_{\lambda_0})$ y sea $B_{\lambda_0} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d\}$ una base de V_{λ_0} . Buscamos una base de un subespacio W complementario de V_{λ_0} ; $B_W = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-d}\}$. Por tanto, $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-d}\}$ es base de V . Se tiene:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \overset{(d)}{\ddots} & & C \\ & & \lambda_0 & \\ & O & & D \end{pmatrix}$$

y por tanto, como

$$\det(M_B(f) - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda I & C \\ O & D - \lambda I \end{vmatrix} = (\lambda_0 - \lambda)^d \det(D - \lambda I_{n-d})$$

la multiplicidad del autovalor λ_0 es mayor o igual que d ; esto es,

$$\alpha \geq \dim(V_{\lambda_0}) = d.$$

Observación. Si λ es un autovalor simple entonces $\dim(V_\lambda) = 1$.

Definición. Un endomorfismo f de V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que es *diagonalizable* si existe una base B^* de V formada por autovectores de f .

Teorema. Un f endomorfismo de V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es diagonalizable si y sólo si todos sus autovalores pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$ y la multiplicidad de cada autovalor λ_i coincide $d_i = \dim(V_{\lambda_i})$; esto es, si

$$\begin{aligned} \lambda_i &\in \mathbb{K} \\ \dim(V_{\lambda_i}) &= \alpha_i \text{ (multiplicidad de } \lambda_i) \end{aligned}$$

o equivalentemente si $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$.

Demostración. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los autovalores de f pertenecientes al cuerpo $\mathbb{K}$ de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ respectivamente. El número máximo de autovectores linealmente independientes es

$$d_1 + \dots + d_r.$$

Como $d_i \leq \alpha_i$ y $\alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n$, entonces, existe una base de V de autovectores de f si y sólo si $d_1 + \dots + d_r = n$; esto es, si y sólo si,

$$\begin{cases} d_i = \alpha_i, \text{ con } i = 1, \dots, r \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n \end{cases}$$

1.6.1 Construcción de la matriz asociada a un endomorfismo f diagonalizable

Sea f un endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial V con $\dim V = n$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ los autovalores de f de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ respectivamente.

Como f es diagonalizable, entonces $\dim(V_{\lambda_i}) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, r$. Tomamos una base de cada subespacio propio:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{\alpha_1}\} \text{ base de } V_{\lambda_1} \\ B_2 &= \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\alpha_2}\} \text{ base de } V_{\lambda_2} \\ &\vdots \\ B_r &= \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{\alpha_r}\} \text{ base de } V_{\lambda_r} \end{aligned}$$

entonces $B^* = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{\alpha_1}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\alpha_2}, \dots, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{\alpha_r}\}$ es una base de V formada por autovectores de f (pues son $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ vectores linealmente independientes).

Observación. La matriz asociada a un endomorfismo f en una base formada por autovectores es diagonal.

Si $B^* = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{\alpha_1}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\alpha_2}, \dots, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{\alpha_r}\}$ es una base de V de autovectores de f entonces como:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 \\ \vdots \\ f(\vec{u}_{\alpha_1}) = \lambda_1 \vec{u}_{\alpha_1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} f(\vec{v}_1) = \lambda_2 \vec{v}_1 \\ \vdots \\ f(\vec{v}_{\alpha_2}) = \lambda_2 \vec{v}_{\alpha_2} \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} f(\vec{w}_1) = \lambda_r \vec{w}_1 \\ \vdots \\ f(\vec{w}_{\alpha_r}) = \lambda_r \vec{w}_{\alpha_r} \end{array} \right\}$$

se tiene

$$M_{B^*}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Definición. Se dice que una matriz cuadrada A es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal D ; esto es, si existen una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $A = PDP^{-1}$.

Observación.

Un endomorfismo f de $V \iff$ La matriz $A = M_{B_C B_C}(f)$ es diagonalizable

Teorema. Una matriz real $A \in M_n$ es diagonalizable si y sólo si todos sus autovalores pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$ y la multiplicidad de cada autovalor λ_i coincide $d_i = \dim(V_{\lambda_i})$.

Esto es, si el polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{\alpha_r}, \text{ donde } \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces se cumple que

$$A \text{ es diagonalizable} \iff \begin{cases} \dim(V_{\lambda_1}) = \alpha_1 \\ \dim(V_{\lambda_2}) = \alpha_2 \\ \vdots \\ \dim(V_{\lambda_r}) = \alpha_r \end{cases}$$

Además las matrices

$$P = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{\alpha_1}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\alpha_2}, \dots, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{\alpha_r})$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

verifican

$$A = PDP^{-1}.$$

Observación. Nótese que

$$\begin{aligned} D &= M_{B^*B^*}(f) \\ P &= M_{B^*B_C}. \end{aligned}$$

Propiedades Si una matriz $A \in M_n$ es diagonalizable entonces

1. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la matriz αA es diagonalizable
2. la matriz traspuesta de A , esto es, A^T , es diagonalizable
3. si además A es no singular, entonces A^{-1} también es diagonalizable. Y si $A = PDP^{-1}$ entonces $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

4. Las matrices $A \in \mathcal{M}_n$ idempotentes sólo tienen los autovalores 0 y 1. Además verifican que

$$\begin{aligned}\dim(V_{\lambda=0}) &= \text{multiplicidad del autovalor 0} \\ \dim(V_{\lambda=1}) &= \text{multiplicidad del autovalor 1}\end{aligned}$$

y por tanto, son matrices diagonalizables.

1.6.2 Cálculo de la potencia k -ésima de una matriz.

Si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz diagonalizable entonces existen matrices $P \in \mathcal{M}_n$ regular y $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal tales que: $A = PDP^{-1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}A^2 &= PD \underbrace{P^{-1}P}_{I} DP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 &= PD \underbrace{P^{-1}P}_{I} D^2P^{-1} = PDID^2P^{-1} = PD^3P^{-1}\end{aligned}$$

en general

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

1.7 Ejercicios resueltos.

1. Dada la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x + 2y, -x + 3y + z, y + z)$ estudiar si existe una base B tal que la matriz asociada respecto de B en los espacios de partida y de llegada sea una matriz diagonal.

SOLUCIÓN: La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica de A es:

$$\begin{aligned}|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) - (1 - \lambda) + 2(1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)^2(3 - \lambda) + (1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)\{(1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1\} \\ &= (1 - \lambda)\{\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1\} \\ &= (1 - \lambda)\{\lambda^2 - 4\lambda + 4\} \\ &= (1 - \lambda)(\lambda - 2)^2\end{aligned}$$

Por tanto, los autovalores de A son $\lambda = 1$ simple y $\lambda = 2$ doble.

El subespacio asociado a $\lambda = 1$ tiene dimensión 1 pues la multiplicidad de $\lambda = 1$ es uno.

El subespacio asociado a $\lambda = 2$ tiene dimensión:

$$\begin{aligned}\dim V(2) &= 3 - \operatorname{rg}(A - 2I) \\ &= 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 3 - 2 = 1 \neq 2\end{aligned}$$

Por tanto, como $\dim V(2)$ no coincide con la multiplicidad del autovalor 2, la matriz A no es diagonalizable.

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a una aplicación lineal f respecto de las bases canónicas.

- (a) ¿Es el vector $(0, 0, 0, 5)$ un autovector de f asociado al autovalor 3?
- (b) ¿Es la matriz A diagonalizable?

SOLUCIÓN:

- (a) Veamos si $f(0, 0, 0, 5) = 3(0, 0, 0, 5)$. Como A es la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas sabemos que la cuarta columna de A son las coordenadas de $f(0, 0, 0, 1)$ en la base canónica; esto es,

$$f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 3) = 3(0, 0, 0, 1)$$

luego, $(0, 0, 0, 1)$ es un autovector de f asociado al autovalor 3. Y por tanto, $(0, 0, 0, 5) = 5(0, 0, 0, 1)$ también es un autovector de f asociado al autovalor 3.

- (b) Calculamos el polinomio característico de A :

$$\begin{aligned}|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 6 & 0 \\ -3 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 6 \\ -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)\{(-5 - \lambda)(4 - \lambda) - 18\} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)\{\lambda^2 + \lambda - 2\} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

Por tanto los autovalores de A son: $-2, 1, 2$ y 3 . Como los autovalores de A son distintos dos a dos, la matriz A es diagonalizable.

3. Estudiar para qué valores del parámetro m es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalizable.

SOLUCIÓN: Como $\det A = 0$ uno de los autovalores de A es $\lambda = 0$.

4. La población activa de un país se clasifica en tres categorías profesionales: técnicos superiores (x), obreros especializados (y) y obreros no especializados (z). Así, en cada generación t la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las tres categorías, es decir, (x_t, y_t, z_t) . Supóngase que:

- Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.
- El 50% de los hijos de los técnicos superiores lo son también, el 25% pasa a ser obrero especializado y el 25% restante es obrero no especializado.
- Los hijos de los obreros especializados se reparten entre las tres categorías según los porcentajes 30%, 40% y 30%.
- Para los hijos de obreros no especializados, las proporciones de reparto entre las categorías son 50%, 25% y 25%.

Se pide:

- Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del país de generación en generación.
- ¿Cuál será la distribución de los trabajadores a largo plazo, independientemente de la distribución inicial?

SOLUCIÓN:

La matriz de transición es

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

A largo plazo habría que elevar la matriz de transición a n y ver a qué tiende cuando n tiende a ∞ . Para ello diagonalizamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0.5 - \lambda & 0.3 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 - \lambda & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 - \lambda \end{vmatrix}$$

sumando a la primera fila el resto de las filas obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0.25 & 0.4 - \lambda & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.25 & 0.4 - \lambda & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 - \lambda \end{vmatrix}$$

y restando a la tercera columna la primera, obtenemos:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.4 - \lambda & 0 \\ 0.25 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} &= (1 - \lambda)(-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 0.4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(-\lambda)(0.4 - \lambda - 0.25) \\ &= -(1 - \lambda)\lambda(0.15 - \lambda) \end{aligned}$$

Por tanto, los autovalores de A son $\lambda = 1, 0.15$ y 0 , distintos dos a dos y por tanto, la matriz A es diagonalizable.

$$V(\lambda = 1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.25 & -0.6 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V(\lambda = 0.15) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 0.15I) \vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 - 0.15 & 0.3 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 - 0.15 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 - 0.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V(\lambda = 0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0.15^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} 0.15^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\end{aligned}$$

la distribución a largo plazo será la misma para cualquier tipo de trabajador, ya que la proporción de reparto será la misma para cada clase de trabajador.

1.8 Cuestiones

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ y sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$A\vec{u} = \vec{0} \text{ y } (A - I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Entonces, se verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que $\lambda = 0$ es un autovalor de A . Entonces, el sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado.
3. Sean A_1 y A_2 dos matrices de orden n diagonalizables. Entonces, se verifica que la matriz $A_1 + A_2$ también es diagonalizable.
4. Sea A una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = -1$. Entonces se verifica que A es diagonalizable.

5. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

6. El vector $\vec{u} = (2, 0, 2)$ es un autovector asociado a un autovalor negativo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Sea A una matriz de orden 4 con autovalores: $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad 3 y $\lambda_2 = -1$ de multiplicidad 1, entonces la traza de la matriz $5A^{-1}$ es $\text{tr}(5A^{-1}) = 10$.
8. Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ tal que $|A| = 0$, $\text{tr}(A) = 3$ y $\lambda = 1$ es un autovalor de A . Entonces $\lambda = 0$ es autovalor de A y $\dim V(0) = 1$.

9. Si conocemos la traza y el determinante de una matriz cuadrada A de orden 2 entonces conocemos sus autovalores.
10. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y sean $\bar{u}, \bar{v}$ y $\bar{w}$ autovectores de A . Entonces se verifica que $B = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.