

1 Isometrías vectoriales.

Sea E un espacio vectorial euclídeo.

Definición Una aplicación $f: E \longrightarrow E$ se dice *transformación ortogonal o isometría vectorial* si conserva el producto escalar; esto es, si

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E.$$

Proposición Si $f: E \longrightarrow E$ es una isometría vectorial entonces es una aplicación lineal.

Demostración Veamos que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y})$ tiene norma cero y, por tanto, es el vector nulo. Se tiene:

$$\begin{aligned} & (f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y})) \cdot (f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y})) \\ = & f(\vec{x} + \vec{y}) \cdot f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x} + \vec{y}) \cdot f(\vec{x}) - f(\vec{x} + \vec{y}) \cdot f(\vec{y}) \\ & - f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x} + \vec{y}) + f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \\ & - f(\vec{y}) \cdot f(\vec{x} + \vec{y}) + f(\vec{y}) \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \cdot f(\vec{y}) \\ = & f(\vec{x} + \vec{y}) \cdot f(\vec{x} + \vec{y}) - 2f(\vec{x} + \vec{y}) \cdot f(\vec{x}) - 2f(\vec{x} + \vec{y}) \cdot f(\vec{y}) \\ & + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \cdot f(\vec{y}) \\ = & (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) - 2(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x} - 2(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{y} \\ & + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ = & \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} - 2\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{y} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} - 2\vec{y} \cdot \vec{y} \\ & + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ = & 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & (f(\lambda \vec{x}) - \lambda f(\vec{x})) \cdot (f(\lambda \vec{x}) - \lambda f(\vec{x})) \\ = & f(\lambda \vec{x}) \cdot f(\lambda \vec{x}) - 2f(\lambda \vec{x}) \cdot \lambda f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{x}) \cdot \lambda f(\vec{x}) \\ = & \lambda \vec{x} \cdot \lambda \vec{x} - 2\lambda \vec{x} \cdot \lambda \vec{x} + \lambda \vec{x} \cdot \lambda \vec{x} \\ = & 0. \end{aligned}$$

Luego f es lineal.

Sea $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, la norma definida en el espacio euclídeo E , $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Proposición La aplicación lineal $f: E \longrightarrow E$ es una transformación ortogonal si y sólo si $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in E$.

Demostración Supongamos que f es una transformación ortogonal, entonces

$$\|f(\vec{x})\| = \sqrt{f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x})} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \|\vec{x}\|, \quad \forall \vec{x} \in E.$$

Supongamos ahora que $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in E$ y veamos que f es ortogonal. Se tiene:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|f(\vec{x} - \vec{y})\|$$

por tanto,

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) &= f(\vec{x} - \vec{y}) \cdot f(\vec{x} - \vec{y}) = (f(\vec{x}) - f(\vec{y})) \cdot (f(\vec{x}) - f(\vec{y})) \\ &= f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) - f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) - f(\vec{y}) \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \cdot f(\vec{y}) \\ &= f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + f(\vec{y}) \cdot f(\vec{y}) \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} - 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + \vec{y} \cdot \vec{y}, \\ (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) &= \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y}, \end{aligned}$$

por tanto, $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Proposición Sea f una transformación ortogonal de un espacio vectorial euclídeo E . Se cumple:

1. f es biyectiva.
2. Los autovalores reales de f son $\lambda = \pm 1$.
3. Si $\vec{u}, \vec{v}$ son autovectores asociados a autovalores diferentes entonces $\vec{u}, \vec{v}$ son ortogonales.

Demostración 1. Como f es un endomorfismo para ver que es biyectiva basta ver que es inyectiva. Supongamos $f(\vec{u}) = \vec{0}$ entonces

$$\|\vec{u}\| = \|f(\vec{u})\| = \|\vec{0}\| = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}.$$

Luego $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ y f es biyectiva.

2. Sea $\vec{u}$ un autovector de f asociado a un autovalor real λ , entonces:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = f(\vec{u}) \cdot f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \cdot \lambda \vec{u} = \lambda^2 \vec{u} \cdot \vec{u}$$

por tanto $\lambda = \pm 1$.

3. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ autovectores asociados a autovalores λ, μ diferentes entonces $\lambda\mu = -1$ y

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \mu \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}$$

por tanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Proposición Sea A la matriz asociada a un endomorfismo f en una base B ortonormal. Entonces,

$$f \text{ es ortogonal} \iff A \text{ es una matriz ortogonal } (AA^t = I).$$

Ejemplo 1 Sea E un espacio vectorial euclídeo referido a la base ortonormal $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se considera el endomorfismo f de E determinado por:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3), \\ f(\vec{e}_2) &= \frac{1}{3}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3), \\ f(\vec{e}_3) &= \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3). \end{aligned}$$

¿Es f una transformación ortogonal? ¿Es f biyectiva? Hallar f^{-1} .

La matriz asociada a f en la base B es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Como la matriz A es ortogonal ($A^{-1} = A^t$) f es una transformación ortogonal.

Los autovalores de A son: $\lambda_1 = \frac{2}{3}i\sqrt{2} + \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\sqrt{2}$ y $\lambda_3 = 1$.
Nótese que: $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ y $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

Como f es una transformación ortogonal, f es biyectiva y la matriz asociada a f^{-1} en la base B es: $A^{-1} = A^t$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(x, y, z) &= A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con el MAPLE: Para calcular la traspuesta de una matriz podemos utilizar el comando

[>transpose(A);

1.0.1 Clasificación de isometrías vectoriales

Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión n . Sea B una base ortonormal de E . Sea $f: E \rightarrow E$ una transformación ortogonal o isometría vectorial. Y sea A la matriz asociada a f en la base B . Como A es una matriz ortogonal se cumple: $\det(A) = \pm 1$.

Definición Si $\det(A) = 1$, se dice que f es una *isometría directa*. Y si $\det(A) = -1$, se dice que f es una *isometría indirecta*.

Definición Un subespacio $U \subset E$ es *subespacio invariante* de una isometría vectorial f si $f(U) \subseteq U$.

Definición Un vector $\vec{x} \in E$ se dice *vector invariante* de una isometría vectorial f si $f(\vec{x}) = \vec{x}$; esto es, $\vec{x}$ es un autovector de f asociado al autovalor $\lambda = 1$.

Observación El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$, $V(1)$, es el subespacio de vectores invariantes de f .

Proposición Sea f una isometría vectorial de E . Si U es un subespacio de E invariante por f entonces $U^\perp$ también es un subespacio invariante por f .

Demostración Tenemos que demostrar que $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$; esto es, $f(\vec{v}) \in U^\perp$ para todo $\vec{v} \in U^\perp$. Sea $\vec{u} \in U$ (por tanto, $f(\vec{u}) \in U$) entonces

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} \underset{f \text{ isometría}}{=} f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v})$$

por tanto, $f(\vec{v})$ es ortogonal a $f(\vec{u}) \in U$ (por ser U invariante), luego $f(\vec{v}) \in U^\perp$.

Ejercicio Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y en él la base ortonormal canónica. Se considera una isometría vectorial indirecta f de $\mathbb{R}^3$ cuyo subespacio de vectores invariantes es $V = \mathcal{L}(\{(1, 0, 1), (0, -1, 2)\})$ (esto es, $V = V(1)$). Hallar la expresión matricial de f .

Solución Como el subespacio de vectores invariantes de f es $V(1)$, en este caso tenemos $\dim V(1) = 2$. Como f es una isometría tenemos: $\det A = -1$ y sabemos que $\lambda = 1$ es un autovalor doble de A . Si A tuviera un autovalor complejo el conjugado también sería autovalor (los autovalores complejos siempre van de dos en dos), por tanto, el tercer autovalor de A es $\lambda = -1$ y $\dim V(-1) = 1$. Como $V = V(1)$, se tiene $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$ y $f(0, -1, 2) = (0, -1, 2)$. Hallamos $V^\perp$:

$$\begin{aligned} 0 &= (x, y, z) \cdot (0, -1, 2) = -y + 2z \\ 0 &= (x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = x + z \end{aligned}$$

luego

$$V^\perp = \{(x, y, z) \mid 0 = -y + 2z, 0 = x + z\} = \mathcal{L}(\{(-1, 2, 1)\})$$

y como los vectores en $V(-1)$ son vectores ortogonales a $V(1)$ se tiene: $V(-1) = V^\perp$. Luego, la matriz asociada a la isometría f es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Isometrías vectoriales en un espacio euclídeo de dimensión 2 Sea E_2 un espacio vectorial real euclídeo de dimensión 2 y sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortonormal de E_2 . Sea f una transformación ortogonal o isometría vectorial de E_2 y sea $A = M_B(f)$, la matriz asociada a f en la base B . Como A es una matriz ortogonal $\det(A) = \pm 1$. Puede suceder:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \iff \det(A) = a^2 + b^2 = 1 \iff f \text{ es directa}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \iff \det(A) = -a^2 - b^2 = -1 \iff f \text{ es indirecta}$$

con $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$.

1. $\det(A) = 1$, entonces la matriz A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

En este caso la transformación es una *rotación* o *giro de ángulo* α . Si $\alpha = \pi$, se dice que f es una *simetría respecto del origen* y si $\alpha = 0$ entonces f es la *identidad*.

2. $\det(A) = -1$, entonces la matriz A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Al ser A una matriz simétrica, es diagonalizable y como los autovalores de A son ± 1 , por ser A una matriz ortogonal, la matriz diagonal de f en una base ortonormal de autovectores es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de una *simetría axial* respecto de la recta determinada por el autovector asociado al autovalor 1 (nótese, que es la recta de vectores invariantes). La recta $V(-1)$ es una recta invariante por f .

Observaciones

1. La composición de dos simetrías axiales f y g es un giro pues

$$\begin{aligned}\det(M(g \circ f)) &= \det(M(g)M(f)) = \det(M(g)) \cdot \det(M(f)) \\ &= (-1) \cdot (-1) = 1.\end{aligned}$$

2. La composición de un giro y una simetría axial es una simetría axial

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la isometría vectorial indirecta tal que $f(2, 1) = (2, 1)$. Hallar la expresión analítica de f .

Solución Tenemos $V(1) = \mathcal{L}(\{(2, 1)\})$ y $V(-1) = V(1)^\perp = \mathcal{L}(\{(-1, 2)\})$. En la base ortonormal $B^* = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ la matriz asociada a f es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

La expresión analítica de f en la base canónica es:

$$f(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \right).$$

Isometrías vectoriales en un espacio euclídeo de dimensión 3 Sea E_3 un espacio vectorial real euclídeo de dimensión 3 y sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base ortonormal de E_3 . Sea f una transformación ortogonal o isometría vectorial de E_3 y sea $A = M_B(F)$, la matriz asociada a f en la base B . Como A es una matriz ortogonal, se tiene: $\det(A) = \pm 1$. El polinomio característico de A es de grado tres y por tanto, tiene alguna raíz real.

1. Si $\det(A) = 1$ entonces la matriz A es de la forma:
 - (a) $A = I$, la isometría f es la identidad (A tiene el autovalor $\lambda = 1$ triple).
 - (b) A tiene el autovalor $\lambda = 1$ simple y $\lambda = -1$ doble. Entonces f es una simetría axial respecto de la recta $V(1)$. El plano $V(-1)$ es un subespacio invariante.

- (c) A tiene el autovalor $\lambda = 1$ simple y los otros dos autovalores son complejos. En este caso f es un giro de ángulo α ($\text{tr} A = 1 + 2 \cos \alpha$) alrededor del eje de vectores invariantes $V(1)$. Por ejemplo, si la matriz A es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{ó} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces f es un giro alrededor del eje X (resp. eje Y ó eje Z).

2. Si $\det(A) = -1$, entonces la matriz A es de la forma:

- (a) La matriz A tiene el autovalor $\lambda = 1$ doble y $\lambda = -1$ simple. Se trata de una simetría respecto del plano de vectores invariantes: $V(1)$. Por ejemplo, si la matriz A es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces f es una simetría respecto del plano $z = 0$ (resp. plano $y = 0$ ó plano $x = 0$).

- (b) La matriz A tiene el autovalor $\lambda = -1$ triple. En este caso la isometría f es una simetría central (respecto del origen).
- (c) La matriz A tiene el autovalor $\lambda = -1$ simple y dos autovalores complejos conjugados. En este caso la isometría f es una composición de un giro de ángulo ($\text{tr} A = -1 + 2 \cos \alpha$) y una simetría.

1.1 Ejercicios

1. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (a) ¿Es f una isometría vectorial?

- (b) Hallar los autovalores de f y los subespacios invariantes de f .
- (c) Clasificar la isometría f .

Solución.

- (a) Sí, porque $A = M_{B_C}(f)$ es una matriz ortogonal ($A^{-1} = A^t$).
- (b) Los autovalores de A son $\lambda = 1$ y $\lambda = -\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i\sqrt{6}$. Los subespacios invariantes de f son:

$$\begin{aligned} V(1) &= \mathcal{L}(\{(1, 1, 2)\}), \\ V(1)^\perp &= \{(x, y, z) \mid x + y + 2z = 0\} \end{aligned}$$

- (c) La isometría f es un giro respecto de la recta $V(1)$ de ángulo

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} - 1 \right) = -\frac{1}{5}.$$

2. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (a) ¿Es f una isometría vectorial?
- (b) Hallar la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Hallar los autovalores de f .

Solución.

- (a) Tenemos:

$$f(0, 1, 1) = -\frac{3}{5}(0, 1, 1) + \frac{4}{5}(1, 0, 1) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right)_{B_C}$$

luego

$$\begin{aligned} \|f(0, 1, 1)\| &= \left\| \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right) \cdot \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right)} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{26} \\ \|(0, 1, 1)\| &= \sqrt{(0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

por tanto, como $\|f(0, 1, 1)\| \neq \|(0, 1, 1)\|$, se deduce que f no es una isometría vectorial.

(b) La matriz asociada a f en la base canónica es:

$$\begin{aligned} M_{B_c}(f) &= M_{BB_c} A M_{BB_c}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que no es una matriz ortogonal. Por tanto, f no es una isometría.

(c) Los autovalores de f son $-1, 1$. El determinante de A es -1 .

3. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y se $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base ortonormal. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) &= -\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{4}{3}\vec{e}_3, \\ f(\vec{e}_2) &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3, \\ f(\vec{e}_3) &= \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Probar que f es una isometría vectorial.
- (b) Calcular los subespacios invariantes de f .
- (c) Clasificar la isometría f .
- (d) Hallar la expresión analítica f^{-1} .

Solución.

(a) Se tiene:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - f(\vec{e}_2) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{4}{3}\vec{e}_3 - \left(\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3\right) \\ &= -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

que sí es una matriz ortogonal, por tanto, f sí es una isometría y además es simétrica.

- (b) Los autovalores de A son $\lambda = 1$ simple y $\lambda = -1$ doble. Y los subespacios invariantes de f son:

$$\begin{aligned} V(1) &= \mathcal{L}(\{(1, 1, 2)\}), \\ V(-1) &= \mathcal{L}(\{(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

- (c) La isometría f es una simetría axial respecto de la recta $V(1)$.
 (d) Como $A^{-1} = A^T = A$ se tiene $f^{-1}(x, y, z) = f(x, y, z)$, esto es,

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \right).$$

4. Sea f la isometría indirecta tal que el plano π generado los vectores $(1, 0, -2)$ y $(1, -2, 0)$ es el subespacio de vectores invariantes. Se pide:

- (a) Hallar los subespacios invariantes de f .
 (b) Dar la expresión analítica de f .
 (c) Clasificar dicha isometría.
 (d) Se considera el conjunto

$$S = \{\vec{x} \in \pi \mid \|\vec{x}\| = 1\}$$

¿Es S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Hallar $f(S)$.

- (e) Hallar la expresión analítica de f^{-1} .
 (f) Hallar la expresión analítica de $f^2 = f \circ f$. ¿Es f^2 una isometría vectorial?

Solución.

- (a) Los subespacios invariantes de f son:

$$\begin{aligned} \pi &= V(1) = \mathcal{L}(\{(1, 0, -2), (1, -2, 0)\}) \\ &= \{(x, y, z) \mid 2x + y + z = 0\} \\ &\quad \text{Las rectas contenidas en el plano } \pi \\ \pi^\perp &= \mathcal{L}(\{(2, 1, 1)\}) = V(-1). \end{aligned}$$

- (b) La matriz asociada a f en la base $B = \{(1, 0, -2), (1, -2, 0), (2, 1, 1)\}$ es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

por tanto, la matriz asociada a f en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La expresión analítica de f es:

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right)$$

- (c) La isometría f es una simetría respecto del plano π .
 (d) El subconjunto $S = \{\vec{x} \in \pi \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ pues si tomo, por ejemplo

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{3}} \right), \vec{y} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, 0 \right),$$

se cumple $\vec{x}, \vec{y} \in S$ y, sin embargo

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}} \right)} = 2 \neq 1$$

luego $\vec{x} + \vec{y} \notin S$. Como f es una isometría vectorial $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| = 1$ y como π es un subespacio invariante $f(\pi) = \pi$. Luego $f(S) = S$.

- (e) Como f es una isometría simétrica se tiene que su matriz asociada en la base canónica cumple: $A^{-1} = A^t = A$ y por tanto $f^{-1} = f$.
 (f) La matriz asociada a $f^2 = f \circ f$ en la base canónica es:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $f^2 = id$ y sí es una isometría vectorial.

5. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se consideran las aplicaciones lineales $g, f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas como sigue:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1 - \sqrt{3}\vec{e}_3) &= -2\vec{e}_3, & g(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1, \\ f(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2, & g(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_2, \\ f(\sqrt{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_3) &= 2\vec{e}_1, & g(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3, \end{aligned}$$

se pide:

- (a) Probar que f es una isometría vectorial y clasificarla.
- (b) Hallar los subespacios invariantes de f .
- (c) Probar que g es una isometría vectorial y clasificarla.
- (d) Hallar los subespacios invariantes de g .
- (e) Hallar $f \circ g$. ¿Es $f \circ g$ una isometría ortogonal? Clasificarla.
- (f) Hallar los subespacios invariantes de $f \circ g$.