

CÁLCULO

Hoja 1. Funciones de una variable.

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - 1} & f(x) &= \arccos \frac{x+1}{x^2+1} \\ f(x) &= \ln(x^2 - 2x + 1) & f(x) &= \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} \\ f(x) &= \ln(x^2 - 1) & f(x) &= \sin\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \end{aligned}$$

2. Se pide estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

3. Sea $f(x)$ la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ kx & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Calcular k para que dicha función sea continua en todos los puntos.

4. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)\ln(x^2-x-6) & \text{si } x \neq -2 \text{ y } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

5. Demostrar que la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ es continua en toda la recta real si se define $f(0) = 0$.
6. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x - E(x)$, donde $E(x)$ es la función parte entera de x ($E(x) = n$ donde $n \leq x < n+1$).
7. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

9. Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de las abscisas en el intervalo $[0, 2]$. ¿Se puede decir lo mismo de la función $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$?

10. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 3}{x^3 - 2x + 1}.$$

¿Se puede afirmar que $f(x)$ está acotada en el intervalo $[-1, 4]$?

11. Estudiar la continuidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(1/x)}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

12. La cantidad de uranio radiactivo que permanece en un cuerpo después de un tiempo t viene dada por la función

$$U(t) = U_0 e^{-kt}$$

donde U_0 es la cantidad de uranio inicial y k es una constante positiva. Hallar la vida media del uranio (tiempo en que la cantidad de uranio se reduce a la mitad).

Problemas tomados de:

[1] A. Primo Martínez, Matemáticas, Ed. SM (1986)

[5] A. García López, F. García Castro, et al. Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable. Ed. Clagsa. (1994)