

CÁLCULO

HOJA 1. Ecuaciones Diferenciales de primer orden. Aplicaciones.

1. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = \frac{y}{x}$,

b) $y' = \frac{e^x}{(1+e^x)y}$,

c) $y' = \frac{y^3-y}{y^2+1}$,

d) $y' = y^2$,

e) $y' = \frac{x^2}{y^2+1}$,

f) $\frac{x^2+1}{yx}dx - (xy+x)dy = 0$,

g) $\frac{x}{e^y}dx - (x^2+x)dy = 0$.

2. Comprobar que las siguientes ecuaciones son homogéneas y resolverlas:

a) $(x^2+y^2)dx + xydy = 0$,

b) $y' = \frac{y^3}{x^3}$,

c) $(x^3-x^2y)dx - x^2ydy = 0$,

d) $y' = \frac{x^2-y^2}{x^2+yx}$,

e) $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$,

f) $y' = \ln x - \ln y + \frac{x-y}{x+y}$.

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $y' - 5y = 1$,

b) $y' - 2xy = x$,

c) $y' - 2xy = 2x^3$,

d) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

e) $(1+x^2)y' + 2xy = \operatorname{tg}x$.

4. Encontrar la solución a los problemas de valor inicial siguientes:

a) $y' - y = 2xe^{2x}$, $y(0) = 1$,

b) $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$, $y(0) = 0$,

c) $xy' + 2y = \sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

d) $y' = 2 - \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$,

e) $y' = \frac{x^2-y}{x+y^2}$, $y(0) = 0$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $y' + xy = xy^{-3}$,

b) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$,

c) $xy' + y = y^2 \ln x$,

d) $y' = y - 2y^2$.

6. Hallar la solución de la ecuación $x^2y' \cos y + 1 = 0$ que verifica que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 16\pi/3$.

7. Hallar una curva para la cual el área limitada por ésta, el eje OX y las dos abscisas $X = 0$, $X = x$, sea la siguiente función de y :

$$area = 4 \ln \left(\frac{y}{2} \right).$$

8. Hallar la curva que verifica que la pendiente de la tangente en cada punto es n veces la pendiente de la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas.

9. Hallar la familia de curvas ortogonales a cada una de las familias de curvas dadas:

a) $y' = x$,

b) $y'^2 x^2 - y^2 = C$.

10. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $xu'(x) = u(x)(1 - \log x + \log(u(x)))$,

b) $(1 + x^2)u'(x) + 2xu(x) = \operatorname{tg} x$,

c) $u'(x) = \frac{-x - 3u(x)}{-x + u(x)}$.

11. Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$ sabiendo que $u(x)$ es la solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} u'(x) = 2u(x)(1 - \frac{1}{2}u(x)) \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

12. Un depósito contiene 50 litros de una solución compuesta por agua y alcohol, 10 % de alcohol frente al 90 % de agua. En el depósito se vierte una solución que contiene el 50 % de agua y el 50 % de alcohol a 4 l/min . Al mismo tiempo el depósito se vacía a una velocidad de 5 l/min . Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, ¿cuánto alcohol queda en el depósito después de 10 minutos?

13. Un día empieza a nevar y sigue nevando con regularidad (cae la nieve a la misma velocidad). Una máquina quitanieves sale a medio día recorriendo dos kilómetros en la primera hora y uno en la segunda. ¿A qué hora comenzó a nevar? Nota: se supone que la potencia de la máquina es constante.

14. En un cultivo de microbios que proliferan la velocidad de crecimiento es proporcional a la cantidad actual. Si se comprueba que el número de microbios es el doble en 5 horas, ¿cuántos habrá al final de la décima hora? Si hay 10^4 al cabo de tres horas y $4 \cdot 10^4$ al cabo de cinco horas, ¿cuántos había al principio?
15. En una habitación en la que la temperatura es de $20^\circ C$, un cuerpo se ha enfriado en 20 minutos de $100^\circ C$ a $60^\circ C$. Hallar la ley de enfriamiento del cuerpo (la variación de la temperatura por unidad de tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y el medio ambiente). ¿Dentro de cuántos minutos se enfriará hasta los $30^\circ C$? Nota: el aumento de la temperatura en la habitación es despreciable.
16. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de rectas que pasan por el punto $(3, 2)$.
17. Hallar la familia de curvas que cortan bajo un ángulo de 45° a la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = C$. Escribir la familia de curvas resultante en coordenadas polares.
18. Hallar y representar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias de radio 1 y centros sobre el eje OY .
19. Probar que son ortogonales las siguientes familias de curvas:

$$a) \quad x^2 - y^2 + \log(\cos(2xy)) = C$$

$$b) \quad x^2 - y^2 + \log(\sin(2xy)) = C$$

20. Considérese un lago de volumen constante V que contiene en el tiempo t una cantidad $Q(t)$ de agente contaminador distribuido homogéneamente en todo el lago. Llamemos $c(t)$ a la cantidad de dicho contaminante en el lago, es decir, $c(t) = Q(t)/V$. Supongamos que en el lago entra una cantidad de agua a una velocidad de $r \text{ km}^3/\text{año}$ con una concentración k de contaminante. Suponiendo que el volumen del lago es constante a lo largo del tiempo (entra la misma cantidad de agua que sale), se pide:
 - a) Calcular la expresión de la concentración de contaminante $c(t)$ para cualquier instante de tiempo t , supuesto que para el instante de tiempo $t = 0$ la concentración es c_0 . ¿Qué concentración límite se tiene cuando $t \rightarrow \infty$?
 - b) Si se termina la introducción de contaminantes en el lago ($k = 0$ para $t > 0$), determínese el intervalo de tiempo que deberá transcurrir antes de que la concentración de contaminantes se reduzca al 50 % y al 90 % de su valor de partida c_0 .
 - c) En la siguiente tabla se dan datos de algunos lagos de América:

LAGO	$V (\text{km}^3 \cdot 10^{-3})$	$r (\text{km}^3/\text{año})$
Superior	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Erie	0,46	175
Ontario	1,6	209

Determinése el tiempo necesario para reducir la contaminación de cada uno de ellos al 10 % de su valor original.

21. Calcular la solución de los siguientes problemas:

$$a) \begin{cases} 9u(x) + x(1 - u'(x)) = 0 \\ u(8) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x \sec \frac{v(x)}{x} + v(x) - xv'(x) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u(x) - \sqrt{x^2 - u^2(x)} - xu'(x) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} tz'(t) - 2te^{-\frac{z(t)}{t}} - z(t) = 0 \\ z(1) = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} e^{u(t)}u'(t) - (t + t^3) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} u'(x) = e^{u(x)+x} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} y' + 3y \left(1 - \frac{x-3}{2}y\right) = xy \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} u'(x) = \operatorname{tg}(u(x)) \operatorname{ctg}(x) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$