

# CÁLCULO

## Hoja 2. Continuidad de funciones de varias variables.

1. Estudiar la existencia de los siguientes límites:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{Sol:}(\nexists)$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} \quad \text{Sol:}(\nexists)$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{Sol:}(0)$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - \cos xy) \sin x}{x^2 + y^2} \quad \text{Sol:}(0)$$

2. Estudiar si la función siguiente es continua.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)^2 \sin y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  Sol:(Cont. en  $\mathbb{R}^2$ )

3. Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{Sol:}(\text{Cont. en } \mathbb{R}^2)$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^3 + y^2) + x^4}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{Sol:}(\text{Cont. en } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y estudiar si se pueden extender de manera continua al punto  $(0, 0)$ :

$$a) f(x, y) = \frac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2} \quad \text{Sol:}(0)$$

$$b) g(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^4} \quad \text{Sol:}(\nexists)$$

$$c) h(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{Sol:}(0)$$

$$d) i(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x} \quad \text{Sol:}(0)$$

$$e) j(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sin(xy)} \quad \text{Sol:}(0)$$

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{Sol: (Cont. en } \mathbb{R}^2)$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{Sol: (Cont. en } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$$

7. Calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  si existe para las siguientes funciones

$$a) f(x, y) = \frac{2x - y^2}{2x^2 + y} \quad b) f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$c) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + 4y^2} \quad d) f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$e) f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^3 + y^3} \quad f) f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

8. Para las funciones de ejercicio anterior estudiar su continuidad. En caso de discontinuidad, ¿cómo podría evitarse?

9. Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Representar la gráfica de  $f$ , la curva imagen por  $f$  de la recta  $y = 2x$ ; esto es,  $f(x, 2x)$  y la curva imagen por  $f$  de la recta  $y = x/2$ ; esto es,  $f(x, x/2)$ .

10. Se considera la función

$$g(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}.$$

Representar la gráfica de  $g$ , la curva imagen por  $g$  de la recta  $y = 2x$ ; esto es,  $g(x, 2x)$  y la curva imagen por  $g$  de la curva  $x = y^3/4$ ; esto es,  $g(y^3/4, y)$ .

11. Se considera la función

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \longmapsto \frac{x^2 + y^2}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

Se pide:

- Hallar el dominio de  $f$ .
- Hacer un esbozo de la gráfica de dicha función.
- Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\ln(1 - x^2 - y^2)} & \text{si } 1 > x^2 + y^2 > 0 \\ -1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ x^2 + y^2 - 1 & \text{si } 1 \leq x^2 + y^2 \end{cases}$$

y hacer un esbozo de su gráfica.

## Comandos de MAPLE

- Para representar gráficamente curvas y superficies necesitamos cargar previamente el paquete *plots*:  
`[> with(plots):`
- Usaremos el comando *display* cuando queremos representar varias curvas o superficies en un mismo dibujo.
- Para representar las curvas de nivel de una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos utilizar el comando *contourplot*.

### Representación en $\mathbb{R}^2$

- Representación de una curva en  $\mathbb{R}^2$  de ecuación cartesiana:  $F(x, y) = 0$ :  
`[> implicitplot(F(x,y)=0, x=a..b, y=c..d);`

### Representación en $\mathbb{R}^3$

- Representación de una superficie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  que es la gráfica de una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , esto es, la superficie tiene ecuaciones paramétricas:  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $z = f(x, y)$ :

`[> plot3d(f(x,y), x=a..b, y=c..d);`

`[> plot3d([x, y, f(x,y)], x=a..b, y=c..d);`

- Representación de una curva  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  que tiene ecuaciones paramétricas:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ :  
`[> spacecurve([x(t),y(t),z(t)], t=a..b);`

- Cálculo de límites:

`[> lim(f(x),x=a);`