

CÁLCULO

HOJA 2. Ecuaciones Diferenciales de orden superior

1. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

- (a) $y'' - y = 0$,
- (b) $y'' - 4y' + 2y = 0$,
- (c) $y'' + 4y' + 5y = 0$,
- (d) $y''' - 4y'' - 7y' + 10y = 0$
- (e) $y''' - 3y' + 2y = 0$
- (f) $y''' - y' = 0$,
- (g) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$,
- (h) $y''' + 2y'' + 4y' + 8y = 0$,
- (i) $y^{IV} - 4y''' + 2y'' + 4y' - 3y = 0$,
- (j) $y^{IV} - 16y = 0$
- (k) $y^{IV} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$
- (l) $y''' - y'' + y' - y = 0$
- (m) $y^{IV} - 6y''' + 7y'' - 12y' + 10y = 0$.

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

- (a) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$,
- (b) $y'' + 4y = 3\operatorname{sen}x$
- (c) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$,
- (d) $y'' + y' + 4y = 2\operatorname{sen}hx$,
- (e) $y'' - 3y' + 2y = 14\operatorname{sen}(2x) - 18\cos(2x)$,
- (f) $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen}x$
- (g) $y'' + y' = 10x^4 + 2$.

3. Resolver las siguientes problemas de valor inicial

- (a) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$
- (b) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$
- (c) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$
- (d) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- (e) $y'' + 4y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$
- (f) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.

4. Hallar una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2, sabiendo que xe^x es una de sus soluciones. Resolver la ecuación encontrada.
5. Encontrar la ecuación diferencial sabiendo que la ecuación característica tiene por raíces $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$. Hallar la solución general.
6. Hallar un operador diferencial lineal que anule la función $f(x) = xe^x \cos x$.
7. Comprobar que $y_1 = x$, $y_2 = xe^x$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a la ecuación:

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3, \quad x > 0.$$

Hallar la solución general de la ecuación completa.

8. Resolver las siguientes problemas con condición de contorno

$$(a) \quad y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2(e^4 - e^{-8})$$

$$(b) \quad y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$$

$$(c) \quad y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(2) = 0.$$

9. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de Lagrange (o variación de parámetros).

$$(a) \quad y'' + y' = Lx.$$

$$(b) \quad y''' + y' = tg(x).$$

$$(c) \quad y''' + 4y' = \sec 2x.$$

10. Hallar la flexión, $y(x)$, de la viga de longitud L empotrada en el extremo derecho ($x = L$) y libre en su extremo izquierdo ($x = 0$) sometida a una carga constante y uniformemente distribuida.

$$\begin{cases} 2y^{IV} = 1 & 0 < x < L \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \\ y(L) = 0 \\ y'(L) = 0. \end{cases}$$

11. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad y^{IV} - 16y = 0$$

$$(b) \quad u^{IV}(x) - 5u'''(x) + 9u''(x) - 7u'(x) + 2u(x) = 0$$

$$(c) \quad u''(x) + 3u'(x) - 10u(x) = 6e^{4x}$$

$$(d) \quad u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 14\sin(2x) - 18\cos(2x)$$

$$(e) \quad y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$

$$(f) \quad u''(x) + u'(x) = \log x$$

12. Resolver el problema de valor inicial en los siguientes casos:

$$(a) \begin{cases} u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 0 \\ u(0) = 2, u'(0) = 5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u''(x) + 4u'(x) + 5u(x) = 0 \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'' + 4y' + 2y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 2 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

13. Hallar la flexión, $u(x)$, de la viga de longitud L empotrada en el extremo derecho y libre en el extremo izquierdo sometida a una carga uniforme $w(x) = 1$ suponiendo que el producto $EI = 2$.

14. Resolver los siguientes problemas:

$$(a) \begin{cases} y'' - 4y' - 3y = 18x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$(b) y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$$

$$(c) \begin{cases} y'' - 2y' + y = \sqrt{x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(d) y''' - y'' + 4y' - 4y = x$$

$$(e) y'' + y = \cos^2 x$$

$$(f) \begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 5 - e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

$$(g) y^{iv} + 2y'' + y = x$$

$$(h) \begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 4 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} y^{iv} - y = 5 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} y''' + y'' = x + e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

15. De la ecuación diferencial

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \frac{1}{x}$$

se conocen tres soluciones linealmente independientes de la ec.homogénea asociada $\left\{1, x, \frac{1}{x}\right\}$.

Hallar la solución particular de la ecuación $y(x)$ que satisface las condiciones: $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

16. Hallar una ecuación diferencial lineal del mínimo orden posible, homogénea, con coeficientes constantes, que tenga entre sus soluciones a la función :

$$f(x) = xe^x \cos(x)$$

17. Probar que $y_1 = 1$ e $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$ son soluciones de $yy'' + (y')^{\frac{3}{2}} = 0$, pero su suma $y = y_1 + y_2$ no es solución. Explicarlo.
18. Oscilaciones libres no amortiguadas. Movimiento armónico simple.

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Resolver para datos: $m=0.5$, el muelle se expande 2 por una fuerza de 100, es decir $k=50$. Posición inicial 0.5, velocidad inicial 10.

19. Oscilaciones libres amortiguadas.

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + c\frac{d}{dt}x(t) + kx(t) = 0$$

Resolver para datos: $m=0.5$, $k=50$, $c=6$. Posición inicial 0.5, velocidad inicial -10.

20. Oscilaciones forzadas.

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + c\frac{d}{dt}x(t) + kx(t) = F_e(t)$$

- (a) Resolver para datos: $m=0.5$, $k=50$, $c=6$. Posición inicial 0.5, velocidad inicial 10 y fuerza externa $F_e(t) = 80 \cos(5t)$
- (b) Resolver para datos: $m=1$, $k=9$, $c=0$. Posición inicial 0, velocidad inicial 0 y fuerza externa $F_e(t) = 80 \cos(5t)$
- (c) Resolver para datos: $m=1$, $k=9$, $c=0$. Posición inicial 0, velocidad inicial 0 y fuerza externa $F_e(t) = \sin(3t)$ (fenómeno de resonancia).