

CÁLCULO

Hoja 3. Diferenciabilidad de funciones de varias variables.

1. Dada la función $f(x, y) = x^2y$ se pide:

- a) Calcular la derivada según el vector $v = (-1, 2)$ en el punto $(1, -2)$.
- b) Calcular la derivada direccional según la dirección θ en dicho punto.
- c) Calcular sus derivadas parciales a través de la definición en dicho punto.

2. Dada la función $f(x, y) = xe^{x^2y}$ se pide: calcular sus derivadas parciales (utilizando las reglas de la derivación) y evaluarlas en el punto $(1, \log 2)$. Calcular también las derivadas parciales segundas en dicho punto.

3. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se pide:

- a) Calcular la derivada direccional según la dirección θ en $(0, 0)$.
- b) Calcular las derivadas parciales en $(0, 0)$.

4. Dada la función $f(x, y, z) = e^{-x}\sin(yz)$ calcular sus derivadas parciales de primer y segundo orden.

5. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se pide:

- a) Estudiar la continuidad de f .
- b) Derivadas parciales en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$.
- c) Derivadas parciales en $(0, 0)$.
- d) Derivada direccional en $(0, 0)$.
- e) ¿Es diferenciable en $(0, 0)$? En caso afirmativo, calcular la aplicación diferencial.

6. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se pide:

- a) Calcular sus derivadas parciales en $(0, 0)$.
- b) Estudiar su diferenciabilidad en $(0, 0)$.
- c) Calcular la derivada direccional según la dirección θ en $(0, 0)$.
- d) Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

7. Dada la función $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$, se pide:

- a) Calcular la derivada direccional en $(1, 2)$ en la dirección de $v = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$.
- b) Calcular el gradiente en $(1, 2)$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima en dicho punto.
- c) Calcular el plano tangente en $(1, 2)$.
- d) Calcular la aplicación diferencial en $(1, 2)$.

8. Dada la función $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, se pide:

- a) Hallar el dominio de f .
- b) Derivadas parciales en $(0, 0)$.
- c) Derivada direccional en $(0, 0)$.
- d) ¿Es diferenciable en $(0, 0)$?
- e) Derivadas parciales en cualquier punto (x_0, y_0) , $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$.
- f) Calcular las derivadas parciales, la derivada direccional y la aplicación diferencial en $(-1, 1)$.

9. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 10\sqrt[5]{x^2y}$ se pide:

- a) Calcular el gradiente de f en $(0, 0)$ y estudiar la diferenciabilidad en dicho punto.
- b) Calcular el gradiente en $(4, 2)$ y el plano tangente a la gráfica en dicho punto.
- c) Calcular el valor de la derivada direccional en $(4, 2)$ según una dirección cualquiera θ ; ¿cuál es el valor máximo de dicha derivada direccional en dicho punto, y en qué dirección?

10. Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$ en el punto $(1, 1, 1/2)$.

11. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar su continuidad.
- b) Hallar las derivadas parciales de f .
- c) Estudiar su diferenciabilidad.

12. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar su continuidad.
- b) Hallar las derivadas parciales de f .
- c) Estudiar su diferenciabilidad.
- d) Calcular la derivada en el punto $(1, 0)$ según las direcciones $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

13. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2xy^2}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

- Estudiar su continuidad.
- Hallar las derivadas parciales de f .
- Estudar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada de f en $(0, 0)$ según la dirección $\frac{\pi}{4}$;
- Calcular la derivada de f en $(1, 1)$ según cualquier dirección θ ; ¿en qué dirección es dicha derivada máxima y cuánto vale en ese caso?
- Escribir la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 1)$.

14. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

- Estudiar su continuidad.
- Hallar las derivadas parciales de f .
- Estudar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada de f en $(0, 0)$ en cualquier dirección.

15. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3(y-1)^3}{x^2 + (y-1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

Se pide:

- Estudiar su continuidad.
- Hallar las derivadas parciales de f .
- Estudar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada de f en el punto $(0, 1)$ según la dirección $\theta = \pi/4$.

16. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Se pide:

- Estudiar su continuidad.
- Hallar las derivadas parciales de f .
- Estudar su diferenciabilidad.
- Calcular la derivada de f en $(0, 0)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 1)$.
- ¿Se cumple $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$?

17. Dada la superficie $z(x, y) = f(x, y) = 3(xy^2)^{\frac{2}{3}}$. Se pide:

- a) Determinar si tiene plano tangente en el punto $(0, 0)$, y, en caso afirmativo, hallarlo.
- b) Hallar en el punto $(x, y, z) = (2, 2, z(2, 2))$ lo siguiente:
 - 1) La curva de nivel correspondiente.
 - 2) El gradiente de f .
 - 3) La derivada de f en la dirección del vector $(-1, \sqrt{3})$.
 - 4) El plano tangente a la superficie.
 - 5) La recta intersección del plano tangente y el plano $z = f(2, 2)$.

18. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar su continuidad.
- b) Existencia de derivadas parciales.
- c) Diferenciabilidad.
- d) Calcular la derivada en el punto $(1, 0)$ según las direcciones $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

19. Dada la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2y$, se pide:

- a) Continuidad en el punto $(0, 0)$.
- b) Existencia de las derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.
- c) Diferenciabilidad en el $(0, 0)$.
- d) Existencia de la derivada direccional de f en el punto $(0, 0)$ en la dirección $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- e) Estudiar si f es de clase C^1 (es decir, si sus derivadas parciales existen y son funciones son continuas).

20. Dada la función

$$f(x, y) = |x - 1|(y + 1)^2$$

se pide:

- a) Ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto correspondiente a $(x, y) = (0, 0)$, justificando previamente su existencia.
- b) Hallar la dirección o direcciones según las cuales la derivada direccional se anula en el punto $(0, 0)$.

21. En una montaña la elevación por encima del mar viene dada por $z = 1000 - x^2 + y^2$ metros. El eje OX positivo apunta hacia el este y el eje OY positivo hacia el norte. Un montañero está en el punto $(4, 20)$: a) si el montañero avanza en dirección oeste, ¿ascenderá o descenderá?. Idem en dirección sureste; b) hallar la dirección que debe tomar si pretende escalar siguiendo la dirección de mayor pendiente; c) ¿en qué dirección debe avanzar para permanecer al mismo nivel?

22. Sea $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$, se pide:

- a) Calcular la derivada direccional de f en $(0, 0)$ en la dirección θ , ¿es f diferenciable en $(0, 0)$?
- b) Obtener las direcciones en las que las rectas tangentes a f en $(0, 0)$ son paralelas al plano XY.
- c) Supongamos que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ¿qué expresión tiene la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $v = (\cos \theta, \sin \theta)$?

23. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3xy^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

se pide:

- a) Estudiar su continuidad.
- b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- c) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
- d) ¿Se cumple $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$?

24. Dada la función

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) = (x + 1)e^{x(y+1)}$$

Se pide:

- a) Escribir la ecuación del plano tangente a su gráfica en el punto $(0, 0)$.
- b) Hallar la dirección y el valor de la derivada direccional máxima en el mismo punto.
- c) Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, 0)$ y dar un valor aproximado de $(1'1)e^{(0'1)(0'9)}$.

25. Dada la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + (y-1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases},$$

Se pide:

- a) Estudiar su continuidad en el punto $(0, 1)$.
- b) Calcular la derivada direccional en el punto $(0, 1)$ según cualquier dirección.
- c) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$.
- d) Definir diferenciabilidad de una función en un punto. ¿Tiene f plano tangente en $(0, 1)$?

26. Dada la función $f(x, y) = |x - 1|(y + 1)^2$, se pide:

- a) Ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto correspondiente a $(x, y) = (0, 0)$, justificando previamente su existencia.
- b) Hallar la dirección o direcciones según las cuales la derivada direccional se anula en el punto $(0, 0)$.