

CÁLCULO

HOJA 3. Sistema de Ecuaciones Diferenciales lineales

1. Para cada uno de los siguientes sistemas hallar una matriz fundamental que verifique $\Phi(0) = I$.

$$(1) \begin{cases} y_1' = -3y_1 + 4y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 3y_2. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = -y_1 + y_2. \end{cases} \quad (4) \begin{cases} y_1' = 4y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 8y_1 - 6y_2. \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} y_1' = 2y_1, \\ y_2' = 3y_2. \end{cases} \quad (6) \begin{cases} y_1' = -4y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases} \quad (8) \begin{cases} y_1' = -4y_1 - y_2, \\ y_2' = -4y_2. \end{cases}$$

2. Hallar la solución general de los sistemas dados:

$$(a) \begin{cases} y_1' = 7y_1 + 6y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 6y_2. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 4y_2 + 9e^t. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - 5t + 2, \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 - 8t - 8. \end{cases} \quad (d) \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - e^t, \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 + e^t. \end{cases}$$

3. Hallar la exponencial de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 5x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $Z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^t$ la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ 2t & 0 & 1 \\ 2t & 1 & 0 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \\ Y(0) = (2, 4, 4)^t \end{cases}.$$

Justifique o refute la siguiente afirmación:

$$z_2(t) = z_3(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

5. Sean $u_1, u_2 : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$u''(x) + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = 0$$

con $a_i : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $(-1, 1)$. Determinar una matriz fundamental para el sistema lineal asociado. Dar también una expresión general de todas sus matrices fundamentales y dar la matriz fundamental $\Phi(t)$ tal que $\Phi(0)$ sea la matriz identidad.

6. El sistema $Y'(t) = A(t)Y(t) + F(t)$, con $t > 0$ y $F(t) = (0, t)^t$, admite por matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1+t \\ e^t & 1 \end{pmatrix},$$

determinar:

- (a) la matriz $A(t)$;
- (b) la solución que en $t = 1$ toma el valor

$$\begin{pmatrix} e^{-5} \\ e^{-7} \end{pmatrix}$$

7. Calcular la exponencial de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} t$$

8. Hallar la solución general de los sistemas dados

$$(a) \begin{cases} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_1 + y_2 + y_3 \\ y'_3 = y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y'_1 = 4y_1 + 6y_2 \\ y'_2 = -3y_1 - 5y_2 + y_3 \\ y'_3 = -3y_1 - 6y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'_1 = -4y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ y'_2 = 2y_1 - 3y_3 \\ y'_3 = -3y_1 - 3y_2 + y_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y'_1 = 3y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = -4y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} y'_1 = 2y_1 - 2y_2 \\ y'_2 = y_1 \end{cases}$$

$$(f) \frac{d}{dx} Y(x) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -10 & 9 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} x \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(g) \frac{d}{dx} Y(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(h) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_2 - y_3 + e^{-x} \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2 + y_3 + e^{-x} \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 - y_2 - 2y_3 - 3e^{-x} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$$

$$(i) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 - 7y_2 + 3y_3 + x \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 - 3y_2 + 2y_3 + x^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

$$(j) \quad \frac{d}{dx}Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y(x) + e^{-x} \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$(k) \quad \frac{d}{dx}Y(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo y C es una matriz constante con determinante no nulo, probar que $\Phi(t)C$ es también matriz fundamental de ese sistema. Se considera ahora el sistema

$$(S) \quad \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 4y_3 + 5e^{2t} \\ y_2' = 4y_1 - 2y_3 \end{cases}, \quad \text{y la matriz } \Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{6t} & e^{-4t} \\ e^{6t} & -2e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Comprobar que la matriz $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado a (S) . Hallar la solución del sistema (S) que verifica $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.