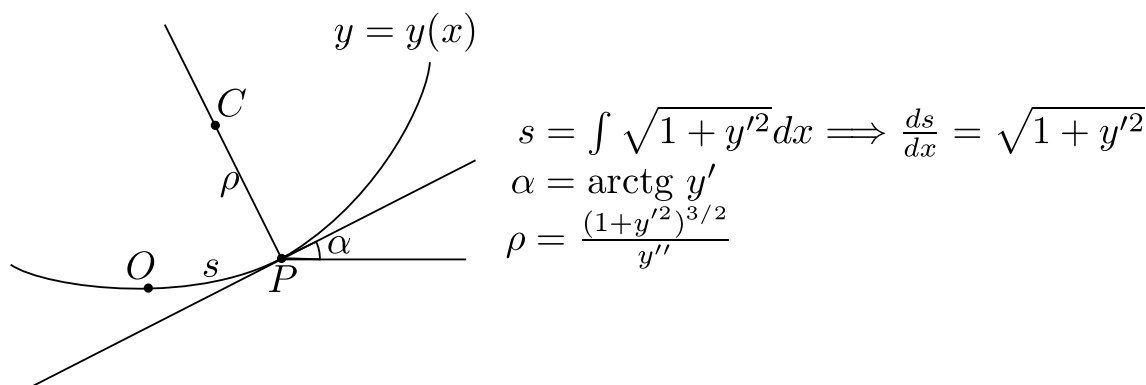


CÁLCULO

Hoja 4. Ecuaciones diferenciales. Problemas varios.



1. Determinar las curvas planas tales que el centro de curvatura de la curva en cada uno de sus puntos está sobre el eje OY .
2. Determinar las curvas planas tales que el radio de curvatura de la curva en cada punto es igual al segmento de recta normal entre el punto y el eje OX .
3. Determinar las curvas planas tales que el centro de curvatura de la curva en cada uno de sus puntos es constante igual a R .
4. Hallar la curva plana tal que pasa por el punto $(0,1)$ y es solución de la ecuación diferencial

$$y' + \frac{3x^2y}{x^3 + 1} = y^2(x^3 + 1) \sin x$$

5. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$$

6. Integrar las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $x^2 - y - xy' = 0$;

(b) $(1 + x)y'^2 - y = 0$.

7. Integrar la ecuación diferencial $y' = \frac{2x}{1+x^2}y + 2x(1+x^2)$.
8. Integrar la ecuación diferencial $y(x+y)dx - x^2dy = 0$.
9. Hallar a en la ecuación $\left(x - \frac{ay}{x^2+y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$ para que sea una ecuación diferencial exacta y obtener la familia uniparamétrica de soluciones.
10. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y' - y = x^2y^5$ y determinar la solución particular que pasa por el punto $P(0, 16)$.
11. Obtener cualquier función $f(x, y)$ en la ecuación $f(x, y) = (1 - 2x - 2y)y'$ para que sea una ecuación diferencial exacta y obténgase una familia uniparamétrica de soluciones.
12. Obtener la familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial

$$(2xy^2 + y)dx + (x + 2x^2y - x^4y^3)dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante que depende del producto xy .

13. Por un punto P de una curva plana se traza su tangente y su normal de manera que la normal corta al eje OY en el punto N y la tangente corta al eje OX en el punto T . Hallar las curvas planas tales que en todos sus puntos el área del triángulo ONT sea igual al área del triángulo rectángulo cuyos catetos son las coordenadas del punto.
14. En una curva cualquiera del plano se considera el segmento TP , segmento de recta tangente en un punto genérico P de la misma, comprendido entre dicho punto P y el punto T , en el que esa recta tangente corta al eje OY . Se considera también el segmento OT , que une el origen de coordenadas con el punto T definido antes.
Se pide: Obtener la familia de curvas del plano tales que las longitudes de los segmentos TP y OT son iguales.
15. Sea un punto genérico de una curva plana y r la recta tangente a la curva en P . Sea M el punto de corte de la recta r con el eje OX . Determinar una familia uniparamétrica de curvas planas que posean la propiedad de que la distancia de P a M es igual a la abscisa de M .
16. Hallar las curvas planas tales que en cada uno de sus puntos, la tangente corta al eje OX en un punto tal que sus distancia al origen sea igual al producto de las coordenadas del punto.
17. Obtener las dos familias de curvas planas tales que la distancia de un punto genérico de una cualquiera de ellas al origen de coordenadas es igual a la longitud del segmento de recta normal comprendido entre ese punto genérico y el eje OY .
18. Hallar la curva plana que pasando por el origen de coordenadas verifica en todos sus puntos P que la proyección sobre el eje OX del segmento de tangente entre P y el eje OX sea igual a la suma de coordenadas de P .
19. Obtener las curvas planas tales que la ordenada en el origen de la recta tangente en un punto cualquiera es igual al cuadrado de la ordenada de ese punto. Determínese, entre ellas, la que pasa por el punto $(1,2)$.
20. Obtener la ecuación diferencial del haz de parábolas $\frac{y}{x} = C - x$.
21. Obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas planas $y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$.
22. Obtener la ecuación diferencial de todas las circunferencias de radio unidad cuyo centro está sobre la bisectriz $x = y$.
23. Obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas planas $y = (A + Bx)e^x$.
24. Obtener la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio fijo y bien determinado R .
25. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $(x - y)y' = x + 3y$.
26. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $yy' = x^2$.
27. Determinar la solución particular por $(0,0)$ de la ecuación diferencial $(1 + 2y)y' = 2x$.
28. Obtener la curva plana que pasando por $(0,2)$ satisfaga la ecuación diferencial $y'(y + x^2y) = 2x$.
29. Resolver el problema de valor inicial $xy' = x^3 - 2y$, $y(1) = 0$.
30. Obtener la solución general de la ecuación diferencial $y = (y^3 + x)y'$.
31. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' - e^{x+y} = 0$.
32. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' = x \sin x - y$.
33. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' - y = xe^{y/x}$.
34. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{e^{2y} + 3x}$.
35. Resolver el problema $y'(y^2 + 1) = x^2 - 1$, $y(-1) = 1$

36. Obtener una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial

$$y \cos x + 2xe^y + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0$$

37. Hallar la solución particular del problema $y'(1 - 2xy^2) = y^3$ $y(0) = 1$.

38. Hallar las curvas planas tales que en todos sus puntos se verifica que el cociente entre la ordenada en el origen de la tangente y la abcisa en el origen de la normal sea constante.

39. Obtener la familia de curvas planas tales que en cualquiera de sus puntos P , el segmento de la recta normal, comprendida entre los ejes coordenados queda dividido por el punto P en dos partes iguales.

40. Obtener las trayectorias ortogonales de la familia $1 + C_1y^2 = 2x$.

41. Obtener las trayectorias ortogonales de la familia de elipses $4y^2 + x^2 = A$.

42. Hallar la curva plana que pasa por el punto $P(1,0)$ y que corta bajo el ángulo $\alpha = \pi/4$ a todas las rectas que pasan por el origen $(0,0)$.

43. Se considera la familia de curvas planas $x^2 + y^2 = Cy$. Se pide:

- (a) Obtener la familia de trayectorias ortogonales.
- (b) Determinar, entre ellas, la que pasa por el punto $(1,1)$. ¿Qué curva es?
- (c) Dibujar aproximadamente las gráficas, tanto de la familia dada como de las trayectorias ortogonales.

44. Hallar el haz de curvas ortogonal a las curvas de nivel del paraboloide hiperbólico $z = kxy$, con k fijo y bien determinado.

45. Hallar el valor del parámetro n para que las curvas $x^n + y^n = C_1$ sean trayectorias ortogonales de la familia $y = \frac{x}{1-C_2x}$.

46. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas de eje OY que pasan por el origen de coordenadas, Dibújense de forma aproximada.

47. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$;

(b) $y'^2 = yy''$.

48. Hallar la solución $y = \Phi(x)$ de la ecuación diferencial $yy'' + y'^2 + 1 = 0$ que verifica $\Phi(0) = 1, \Phi(1) = 2$.

49. Hallar la ecuación lineal homogénea de segundo orden que admita como soluciones particulares $y_1 = e^x$, $y_2 = x^2e^x$.

50. Escribir la ecuación diferencial ordinaria homogénea que tiene como solución $y(x) = C_1e^x + C_2xe^2 + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

51. Comprobar que si $a + b + c = 0$, la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ admite la solución $y = e^x$. Como aplicación integrar la ecuación diferencial $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^{2x}$.

52. Se sabe que la ecuación diferencial $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ tiene como soluciones las funciones $y_1(x) = x, y_2(x) = x^2, y_3(x) = x^3$.

(a) Calcular $a(x), b(x)$, y $c(x)$.

(b) Calcular la solución de la ecuación diferencial que verifica $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

53. Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' + ky = x$ obteniendo las distintas formas de la solución general según los distintos valores del parámetro real k .

54. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones:

- (a) $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^2x}{\sin x}$
- (b) $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$
- (c) $y^{IV} + y' = 3e^{-x}$
- (d) $y''' + 3y'' - 4y = 48(e^{2x} + e^{-2x})$

55. Obtener la solución del problema de valor inicial $y''' + y'' - 2y' = 5 - e^x$, $y''(0) = y'(0) = y(0) = 1$.
56. Resolver el problema de Cauchy constituido por la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = e^2x$ con las condiciones iniciales $y = 0, y' = 0$ para $x = 0$.
57. Obtener la solución de los siguientes sistemas:

- (a) $\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - y_2 + e^{3x} \\ y'_2 = y_1 + 4y_2 + xe^{3x} \end{cases}$ que verifica $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$.
(En notación matricial $\bar{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \bar{y} + \begin{pmatrix} e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix}$, $\bar{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)
- (b) $\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 + 1 \\ y'_2 = -y_1 + 3y_2 \end{cases}$ que verifica $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$.
- (c) $\begin{cases} y'_1 = y_1 + 3y_2 + x - 2 \\ y'_2 = 5y_1 + 3y_2 - 3 \end{cases}$ que verifica $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$.
- (d) $\begin{cases} y'_1 = 3y_1 - y_2 + e^x \\ y'_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$ que verifica $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$.

58. Obtener la solución general del sistema

$$\begin{cases} y''_1 = 2y'_1 + 5y_2 \\ y'_2 = -y'_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ y la solución particular que verifica } y_1(0) = 1, y'(0) = 0, y_2(0) = 1.$$

59. Resolver el sistema

$$\bar{y}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}(x) \text{ para } \bar{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$