

CÁLCULO

Hoja 4. Taylor, extremos relativos y condicionados.

1. Dada la función $f(x, y) = xy^2 + \sin(xy)$, calcular el polinomio de Taylor de orden 3 en un entorno del punto $(1, \pi/2)$ y utilizarlo para calcular el valor aproximado de $f(1, 2, \frac{\pi}{2} - 0, 1)$.
2. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima a la función $f(x, y) = \sin x \cos y$ en un entorno de $(0, 0)$.
3. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y)$ en el punto P en los siguientes casos:

- a) $f(x, y) = x \cos x + y \sin y$, $P = (0, 0)$.
- b) $f(x, y) = \log(xy)$, $P = (1, 1)$.
- c) $f(x, y) = 1 - \cos(a(x + y))$, $P = (0, 0)$.
- d) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $P = (0, 0)$.
- e) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $P = (0, 0)$.
- f) $f(x, y) = e^{x+y}$, $P = (0, 0)$.
- g) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$, $P = (1, 0)$.

4. Determinar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

y calcular su polinomio de Taylor en el punto $(0, 0)$ de orden 2.

5. Hallar los extremos locales (o relativos) de las siguientes funciones:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ | (d) $f(x, y) = x^4 + y^4$ |
| (b) $f(x, y) = x^2 y^2$ | (e) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ |
| (c) $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2 - 2xy$ | |

6. Hallar los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = 3x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xz + 2x + 6y$.
7. Calcular los valores máximo y mínimo absolutos (o globales) de la función $f(x, y) = x^3 + y^3$ sobre el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
8. Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2).$$

Se pide:

- a) Hallar sus máximos y mínimos locales (o relativos) según los distintos valores de a .
- b) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

en los casos $a = -1$ y $a = 5$.

9. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ en la placa triangular del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 9 - x$.
10. Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la curva $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$.

11. El recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ está cubierto por una bóveda cuya altura es $z = \frac{30 - x^4 - y^4 + 4y^2}{20}$ y rodeado por un muro vertical cilíndrico. Calcular la altura máxima de la bóveda y la máxima y mínima del muro teniendo en cuenta que cada unidad equivale a 10 metros.

12. Calcular los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = xy + z^2$ con la condición $2x - y + z = 0$.

13. El recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ está cubierto por una bóveda cuya altura en cada punto es

$$z(x, y) = \frac{1}{48} (80 - 4x^4 - y^4 + 8x^2 - 8y^2)$$

y cerrado por un muro perimetral vertical. Calcular las alturas máxima y mínima de la bóveda y del muro.

14. Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + 3y^2.$$

- a) Calcular y clasificar sus extremos relativos.
- b) Calcular sus extremos absolutos en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 3y^2 - 9 \leq 0\}.$$

15. Dada la función $f(x, y) = 2x^5 + 2y^5 - 5x^2 - 5y^2$, se pide:

- a) Hallar y clasificar sus extremos relativos (o locales);
- b) Calcular sus extremos absolutos (o globales) en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

16. Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x, y) = 4x^3 + 4y^2 - 6x^2 + 10,$$

sobre el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

17. Sea $f(x, y) = e^{ax+y^2} + b \sin(x^2 + y^2)$. Se pide:

- a) Determinar los valores de a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0, 0)$ y el polinomio de Taylor de segundo orden de f en el origen toma el valor 6 en el punto $(1, 2)$.
- b) Con los resultados obtenidos en el apartado anterior, ¿qué clase de extremo es el punto $(0, 0)$?

18. Hallar a y b sabiendo que, en el punto $(1, 3, 1)$, la función $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + bxy + az$ tiene un extremo condicionado sobre la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 11$.

19. Calcular el valor de las constantes a y b para los que la función $f(x, y) = ax^3 + y^3 - 8e^{x-2} + by^2$ tiene en el punto $(2, 2)$ un extremo condicionado en la curva $x^2 + y^2 = 8$ y su polinomio de Taylor en el punto $(2, 0)$ toma el valor 4 en el punto $(3, 1)$.

20. El recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ se cubre mediante una bóveda de altura $z = \frac{1}{4}(2 + x - x^3 - y^2)$. Calcular las alturas máxima y mínima de dicha cubierta (cada unidad equivale a 10 metros).

21. Dada la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$. Se pide:

- a) Calcular y clasificar sus extremos relativos (o locales);
- b) Calcular sus extremos absolutos (o globales) en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

22. Dada la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 8x^2 + 8y^2 + 17$. Se pide:
- Hallar sus extremos relativos.
 - Hallar su valor máximo y mínimo (global) en el recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 36\}$.
23. Dada la función $f(x, y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + 3y^2$. Se pide:
- Calcular y clasificar sus extremos relativos (o locales);
 - Calcular sus extremos absolutos (o globales) en el compacto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 3y^2 - 9 \leq 0\}$.
24. Dada la función $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$. Se pide:
- Determinar y clasificar sus extremos relativos.
 - Determinar sus extremos absolutos sobre el triángulo determinado por las rectas $x = 0$, $y = 2$ e $y = 2x$.

25. Hallar el punto del hiperboloide $6x^2 + 15y^2 + 3z^2 - 6xz + 12yz + 9z + 40 = 0$ más próximo al plano OXY .

26. Calcular la imagen $f(A)$ de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 \leq 0\}.$$

Calcular la mínima distancia al origen de coordenadas de la curva $x^2 - y^2 + 2x + 5 = 0$.

27. Encontrar el punto del plano $2x + 3y + 4z = 12$ en el que la función $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z$ alcanza un valor mínimo.
28. Calcular la distancia mínima entre la recta $3x + y = 5$ y la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$.
29. Calcular las distancias máxima y mínima del punto $(2, 1, 2)$ a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
30. Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.
31. Dada la función $f(x, y) = ax^2 + y^2 - 2\log(x+1) + by$, hallar el valor de las constantes a y b sabiendo que $f(x, y)$ tiene un extremo condicionado sobre la curva $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $(1, 2)$ y que la derivada direccional máxima en el punto $(0, 0)$ vale 4.

32. Dada la función

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2),$$

se pide:

- Calcular todos sus puntos críticos y clasificarlos.
 - ¿Existe algún valor de a de tal forma que f sólo tenga un punto crítico?
33. Dada la función $f(x, y) = ax^2 + y^2 - 2\log(x+1) + by$, hallar el valor de las constantes a y b sabiendo que:
- f tiene un extremo condicionado sobre la curva $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $(1, 2)$,
 - el polinomio de Taylor de f en el origen se anula en el punto $(1, 2)$.

34. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4 + x^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
- Estudiar la existencia de derivadas parciales primeras de f en $\mathbb{R}^2$.
- Estudiar su diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.
- Calcular la derivada de f en $(0, 0)$ según la dirección $\pi/4$.
- Calcular la derivada de f en $(1, 1)$ según cualquier dirección θ . ¿En qué dirección es máxima y cuánto vale entonces?
- Escribir la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1)$.